

Introduction à l'atelier sur l'Analyse de données Séries de Fourier et transformation de Fourier

Jean Roux

CERES-ERTI
École Normale Supérieure, Paris.

Avertissement : Ce syllabus sur les séries et la transformée de Fourier ne peut qu'être incomplet. En effet on ne peut pas avoir la prétention d'en faire la théorie en quelques pages, alors qu'il a fallu plus d'un siècle (avec l'expansion de l'analyse au XIX^e) pour éclaircir le développement d'une fonction en séries trigonométriques. Afin d'y voir clair, il faut avoir à notre disposition au moins les outils de l'intégrale de Riemann (1854) puis celle de Lebesgue (1902). La théorie des distributions de L. Schwartz (milieu du XX^e siècle) joue aussi un grand rôle dans la justification de la transformée de Fourier. De nombreux ouvrages traitent de l'analyse harmonique qui est toujours un domaine actif de recherche. C'est donc une gageure, dans un cours d'une heure et demie, d'enseigner le sujet à des auditeurs venant d'horizons très différents. Tout au plus peut-on sensibiliser ces auditeurs à des éléments de la théorie, en éclairant de façon fragmentaire, le plus correctement possible, le cadre d'application de ces techniques.

Table des matières

1	Avant-propos sur le traitement du signal	1
2	Séries de Fourier	2
2.1	Exponentielles de période T . Série de Fourier.	3
2.2	Calcul des coefficients c_k de la série de Fourier (2.1)	5
2.3	Notion de fonction "périodisée", calcul de ses coefficients de Fourier.	7
2.4	Convergence des séries de Fourier au sens des fonctions	10
3	Transformation de Fourier	11
3.1	Introduction	11
3.2	Définition de la transformation de Fourier	14
3.3	Formule de réciprocity entre \mathcal{F} et $\overline{\mathcal{F}}$ dans le cas des fonctions.	16
3.4	Formules fondamentales et majorations	19
3.5	Convolution et transformée de Fourier	22

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	2
4 Annexe 1 : Théorèmes de Fubini et de Lebesgue	25
5 Annexe 2 : Réciprocité, cas des distributions	26

1 Avant-propos sur le traitement du signal

Le domaine d'application du traitement du signal est à la fois varié et étendu. On peut citer de façon non exhaustive l'analyse des signaux biomédicaux (électrocardiogramme, électroencéphalogramme, ...), l'analyse des images photographiées par satellites et des images mesurées en radiologie (scanner, résonance magnétique nucléaire). Un autre domaine important est celui de l'analyse d'un signal émis puis déformé par une cible ou un obstacle avant d'être mesuré par un capteur, dans l'espoir que l'étude du signal capturé donnera une information utile sur cet obstacle (la cible). C'est un problème inverse. Ceci est utile, par exemple, pour détecter des fissures éventuelles dans des matériels inaccessibles à l'expérience directe (cœurs irradiés de centrales nucléaires par exemple). On peut classer ce traitement du signal dans la rubrique du contrôle non destructif.

Traiter un signal, c'est extraire de l'information des mesures effectuées par un capteur afin d'atteindre un objectif qui peut aller de la compréhension du monde physique (biologie, météorologie, géologie, physique, chimie, etc...) à l'action sur ce monde (par exemple en robotique). Symboliquement le système de génération et de traitement du signal peut se représenter sous la forme suivante



FIG. 1 – Schéma d'un système de génération et de traitement du signal.

Le milieu de transmission déforme les signaux émis. L'analyse et la compensation de ces déformations est sans doute un des problèmes centraux du traitement du signal. Mais aussi, le signal mesuré par les capteurs est, la plupart du temps, entaché d'un *bruit* de mesure qui n'est pas lié directement au phénomène étudié. On peut dire que le signal mesuré par un capteur n'est ni parfaitement prévisible ni parfaitement imprévisible (dans ce dernier cas il serait évidemment inutile de l'étudier !). Ces caractéristiques, perturbations et absence de parfaite prévisibilité, nécessitent l'emploi fréquent d'outils développés dans le cadre de la théorie des probabilités.

Notons aussi que de nombreuses méthodes de traitement des signaux ne sont validées ou justifiées que par des simulations sur des "cas d'école" abstraits : les signaux générés artificiellement présentent toutes les qualités requises et les méthodes proposées permettent d'atteindre les objectifs fixés. Pourtant, dès qu'on les confronte à des problèmes réels, les méthodes s'avèrent décevantes parce que les hypothèses retenues (souvent simplificatrices) pour la simulation ne correspondent pas toujours à la réalité des phénomènes mesurés.

Le traitement du signal, pour toutes ces raisons, est donc un problème difficile.

Cependant il existe des méthodes et/ou outils de “base”, au compte desquels on peut ranger, pour les signaux continus, les séries et la transformation de Fourier que nous allons partiellement examiner et pour lesquelles nous ne prétendons à aucune originalité. Ce cours ne présentera pas :

- la transformée de Fourier rapide (the Fast Fourier Transform (FFT)),
- la théorie de l'échantillonnage ; évidemment le traitement numérique du signal se fait avec des valeurs discrètes : il n'est pas possible de traiter sur ordinateur des signaux à temps continu. Cela pose les deux questions suivantes : 1) sur quel intervalle de temps travaille-t-on ? 2) Quelle quantité de valeurs mesurées prend-t-on ? Souvent, par souci de simplicité, on échantillonne le signal à des intervalles de temps homogènes (i.e. à des pas de temps égaux),
- l'étude des filtres numériques.

Chacun de ces items pourrait faire le sujet d'une leçon approfondie.

2 Représentation des signaux périodiques sous la forme de séries de Fourier

Il semble que ce soit Charles Fourier, dans son ouvrage sur la “Théorie analytique de la chaleur” en 1822, qui ait eu l'idée, le premier, de développer une fonction en série de fonctions trigonométriques.

Soit f une fonction réelle ou complexe d'une variable réelle. On appelle *période* d'une fonction périodique f tout nombre réel $T \neq 0$ tel que $f(x+T) = f(x)$. On vérifie immédiatement que :

- l'opposé d'une période de f , la somme de deux périodes de f , sont des périodes de f . Plus généralement une somme *finie* de périodes est période de f .

On peut montrer que les périodes de f forment un sous-groupe du groupe additif \mathbb{R} des nombres réels. De plus, c'est un sous-groupe *fermé* (au sens topologique) car toute limite T d'une suite de périodes T_j de f est encore une période. Or il n'y a que trois catégories de sous-groupes fermés de \mathbb{R} :

- le sous-groupe réduit à l'élément zéro, toute fonction f n'ayant pas une période $T \neq 0$ est dite non-périodique,
- le sous-groupe est \mathbb{R} tout entier,
- l'ensemble des multiples lT_0 (l entier > 0 , < 0 ou $= 0$) d'un nombre T_0 dit *période fondamentale* de f .

Une fonction vérifiant l'un des deux derniers cas est dite *périodique*.

Remarque 2.1. Dans le cas d'une fonction de \mathbb{R}^n (fonction de n variables) une période est un vecteur $\vec{T} \neq \{\vec{0}\}$ tel que $f(\vec{x} + \vec{T}) = f(\vec{x})$.

2.1 Exponentielles de période T . Série de Fourier.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $x \in \mathbb{R}$, pour qu'une exponentielle $e^{\lambda x}$ ait la période $T > 0$ réelle il faut et il suffit que $e^{\lambda T} = 1$. En effet si on a $e^{\lambda(x+T)} = e^{\lambda x}$ cela implique $e^{\lambda T} = 1$; réciproquement si $e^{\lambda T} = 1$ alors $e^{\lambda(x+T)} = e^{\lambda x} e^{\lambda T} = e^{\lambda x}$. La condition $e^{\lambda T} = 1$ est équivalente à $\lambda T = 2ki\pi$. Si T est donnée, les valeurs de λ possibles sont $\lambda = ik\frac{2\pi}{T} = ik\omega$.

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ est la *pulsation* associée à la période T .

Remarque 2.2. Dans la plupart des ouvrages anglo-saxons on ne fait pas de différence entre pulsation et fréquence, qui représentent des données identiques avec des unités différentes : les radians par seconde pour ω et le nombre de périodes (ou de tours) par seconde pour la fréquence.

Pour $k \neq 0$ fixé, on obtient une exponentielle $e^{ik\omega x}$ de module égal au nombre 1, dont la période fondamentale est $\frac{T}{|k|}$. En effet $e^{ik\omega(\frac{T}{|k|}+x)} = e^{ik\omega x} e^{\lambda\frac{T}{|k|}} = e^{ik\omega x} e^{\pm 2i\pi} = e^{ik\omega x}$.

La question fondamentale concernant les séries de Fourier est : f étant une fonction périodique admettant la période $T > 0$, est-elle développable en la série trigonométrique suivante, dite *série de Fourier* ?

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega x} \quad \text{où } \omega = \frac{2\pi}{T}; \quad (2.1)$$

chaque terme de la série étant, au facteur $c_k \in \mathbb{C}$ près, l'une des exponentielles ayant la période T (en effet $e^{ik\frac{2\pi}{T}(x+T)} = e^{2ki\pi\frac{x}{T}} e^{2i\pi k} = e^{2ki\pi\frac{x}{T}}$). Le module $|c_k|$ du coefficient de Fourier $c_k \in \mathbb{C}$ est l'amplitude de l'harmonique $k^{\text{ième}}$ du signal et $k\omega$ est la pulsation de cet harmonique.

Parfois, si f est réelle, on groupe deux à deux les valeurs opposées de k et on remplace la série d'exponentielles par la série trigonométrique suivante

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x)), \quad (2.2)$$

où $a_k, b_k \in \mathbb{R}$. Un calcul d'identification montre que

$$\begin{cases} a_0 = c_0 \\ a_k = c_k + c_{-k} \\ b_k = i(c_k - c_{-k}) \end{cases} \quad \text{ou bien} \quad \begin{cases} c_0 = a_0 \\ c_k = \frac{a_k - ib_k}{2} \\ c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2} \end{cases}. \quad (2.3)$$

En effet regroupons dans (2.1) les termes de rang k et $-k$. Il vient :

$$c_k e^{ik\omega x} + c_{-k} e^{-ik\omega x} = c_k (\cos(k\omega x) + i \sin(k\omega x)) + c_{-k} (\cos(k\omega x) - i \sin(k\omega x))$$

d'où la formule (2.2) avec a_k et b_k définis par (2.3).

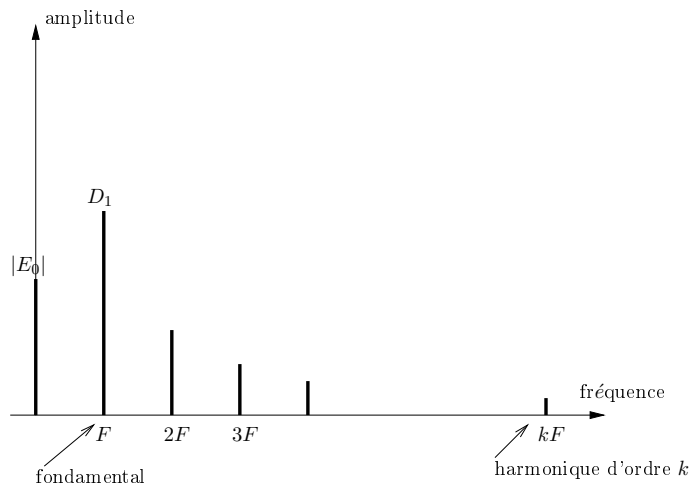


FIG. 2 – Spectre d'amplitude de tout signal périodique. $|E_0|$ est le module de la valeur moyenne de f sur une période.

Les nombres a_k et b_k représentent les composantes de l'amplitude de l'harmonique de rang k . Pour un rang k l'amplitude est définie par $D_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$.

On remarque par (2.3), toujours si f est réelle, que $c_k = \overline{c_{-k}}$. Dès lors, comme $a_k^2 + b_k^2 = 4c_k c_{-k} = 4c_k \overline{c_k} = 4|c_k|^2$, on vérifie que $(1/2) \cdot D_k = |c_k| = |c_{-k}|$. Ce qui fait le lien, pour f réelle, pour l'harmonique de rang k , entre les deux définitions de l'amplitude selon qu'elle est définie par les coefficients des formules (2.1) ou (2.2).

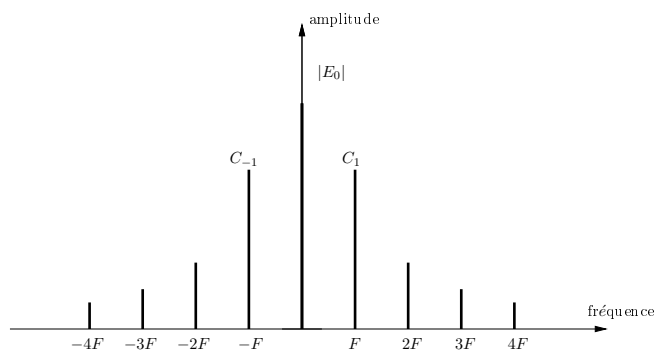


FIG. 3 – Spectre d'amplitude bilatéral de tout signal périodique.

Les questions que l'on peut (que l'on doit!) se poser sur les séries de Fourier sont les suivantes :

Soit la série de Fourier $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f) e^{ik\omega x}$ d'une fonction f périodique, il est souhaitable d'écrire $c_k(f)$ pour les coefficients de Fourier pour bien indiquer qu'ils dépendent de la fonction f .

- Pour quelles fonctions f les coefficients de Fourier sont-ils calculables,

et comment le sont-ils dans ce cas ?

- Les séries de Fourier convergent-elles ? Si oui, est-ce vers f et en quel sens ? La question est donc de pouvoir écrire $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega x}$. Par exemple que peut-on affirmer si f est localement sommable, si f est continue ou de classe \mathcal{C}^1 (continuellement différentiable) ?

On écrit que $f \in L^1$ lorsque $\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$ c'est-à-dire lorsque la fonction f à valeurs complexes est sommable sur toute la droite \mathbb{R} . On dit que f est *localement sommable* si elle est intégrable sur tout intervalle fini. En raison de la périodicité de f cela signifie que f est sommable sur tout intervalle-période $(a, a + T)$, à savoir que

$$\|f\|_{1,\text{loc}} = \int_a^{a+T} |f(x)| dx < \infty.$$

Ce que nous noterons par $f \in L^1_{\text{loc}}$.

Nous donnerons quelques éléments de réponse aux questions posées.

2.2 Calcul des coefficients c_k de la série de Fourier (2.1)

Supposons la série de Fourier uniformément convergente, ce qui implique que f est continue puisque chaque terme de la série est continue en x . On peut alors, grâce à un théorème de l'analyse, faire une intégration terme à terme de la série (2.1) et calculer

$$C_k(f) = \int_a^{a+T} \frac{f(x)e^{-ik\omega x}}{T} dx = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_l \int_a^{a+T} \frac{e^{i(l-k)\omega x}}{T} dx, \quad (2.4)$$

où f est donnée sur un intervalle-période $(a, a + T)$. Montrons d'abord que cette intégrale est indépendante du choix de cet intervalle-période, c'est-à-dire de a . Considérons un autre intervalle-période $(b, b + T)$ avec $b \neq a$. On peut écrire symboliquement $\int_a^{b+T} = \int_a^b + \int_b^{b+T}$ où $\int_a^{b+T} = \int_a^{a+T} + \int_{a+T}^{b+T}$; on a en égalant les deux seconds membres

$$\int_b^{b+T} = \int_a^{a+T} + \left(\int_{a+T}^{b+T} - \int_a^b \right). \quad (2.5)$$

La fonction $g(x) = f(x)e^{-ik\omega x}$ est périodique de période T (f est T -périodique par hypothèse et on a déjà remarqué que c'est vrai pour l'exponentielle $e^{-ik\omega x}$). Par le changement de variable $x = \xi + T$, on a donc

$$\int_{a+T}^{b+T} g(x) dx = \int_a^b g(\xi + T) d\xi = \int_a^b g(\xi) d\xi,$$

en tenant compte de (2.5) on a ainsi

$$\int_b^{b+T} f(x)e^{-ik\omega x} dx = \int_a^{a+T} f(x)e^{-ik\omega x} dx, \quad (2.6)$$

ce qui démontre notre assertion qui est indispensable pour affirmer (heureusement) que le calcul des c_k est indépendant de l'intervalle-période choisi : leur évaluation ne dépend que de la fonction f périodique. Reprenons le calcul de $\mathcal{C}_k(f)$. Il s'agit, voir le dernier membre de (2.4), de calculer essentiellement $\int_a^{a+T} \frac{e^{im\omega x}}{T} dx$, avec $m = l - k$. Compte tenu de la T-périodicité de l'exponentielle puisque $e^{im\omega T} = 1$ si $\omega = 2\pi/T$, on a

$$\int_a^{a+T} \frac{e^{im\omega x}}{T} dx = \begin{cases} \frac{1}{T} \frac{e^{im\omega x}}{im\omega} \Big|_a^{a+T} = 0 & \text{si } m \neq 0 \\ 1 & \text{si } m = 0 \end{cases}. \quad (2.7)$$

Finalement il ne reste dans la somme représentant la série de Fourier de f que le terme en $l = k$ (c'est-à-dire le terme en $m = 0$) tous les autres termes étant nuls. Par la formule (2.4) on a donc

$$\mathcal{C}_k(f) = c_k. \quad (2.8)$$

Remarque 2.3. Soit f est une fonction périodique "pure" du type $f(x) = ce^{i\omega x}$, mais non identifiée comme telle. On cherche naïvement son développement en série de Fourier. Le calcul élémentaire précédent montre que le seul terme non nul de la série sera $c_1 = c$. Ce qui identifie évidemment la fonction f par $c_1 e^{i\omega x}$. Les fonctions périodiques "pures" (triviales) sont ainsi heureusement (!) bien identifiées par leurs séries de Fourier !

Ainsi si la fonction périodique f est continue et si cette fonction possède un développement de Fourier uniformément convergent alors ce développement est entièrement connu avec

$$c_k = \mathcal{C}_k(f) = \int_a^{a+T} \frac{f(x)e^{-ik\omega x}}{T} dx. \quad (2.9)$$

Les quantités c_k sont toujours définies, même si f n'est pas continue, pourvu que f soit localement sommable.

Les c_k sont les *coefficients de Fourier* de f . Ils ne varient pas si l'on modifie f sur un ensemble de mesure nulle (parce que l'on travaille avec l'intégrale de Lebesgue). On peut donc supposer f définie presque partout (i.e. partout sauf sur un ensemble de mesure nulle).

On peut donner les coefficients dans le cas d'un développement de Fourier en série de cosinus et de sinus. Tenu compte de (2.3) et (2.9), on a les formules suivantes

$$a_0 = c_0 = \int_a^{a+T} \frac{f(x)}{T} dx, \quad (2.10)$$

et, pour $k > 0$,

$$\begin{cases} a_k &= c_k + c_{-k} = 2 \int_a^{a+T} \frac{f(x) \cos(k\omega x)}{T} dx \\ b_k &= i(c_k - c_{-k}) = 2 \int_a^{a+T} \frac{f(x) \sin(k\omega x)}{T} dx \end{cases} \quad (2.11)$$

Remarque 2.4. Si f est paire ($f(x) = f(-x)$) ou impaire ($f(-x) = -f(x)$) on a avantage à utiliser les formules trigonométriques. En effet, en intégrant sur l'intervalle symétrique par rapport à l'origine $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ (l'intervalle-période précédent avec $a = -\frac{T}{2}$), si f est paire alors $b_k = 0$ pour tout $k > 0$ car la fonction $f(x) \sin(k\omega x)$ est impaire ; donc dans le cas où f est paire seuls les coefficients a_0 et a_k pour $k > 0$ sont non nuls.

Dans le cas où f est impaire, toujours en travaillant dans le même intervalle, on constate que $a_k = 0$ pour $k \geq 0$.

Dans les deux cas on a deux fois moins d'intégrales à calculer.

Remarque 2.5. i) Les coefficients de Fourier font intervenir les valeurs de f sur tout intervalle-période contrairement aux coefficients du développement de Taylor qui ne font intervenir que les valeurs de f (et de ses dérivées) au voisinage du point où l'on effectue le développement.
ii) Remarquons enfin que l'on a toujours les majorations

$$|c_k| \leq \int_a^{a+T} \frac{|f(x)|}{T} dx = \frac{1}{T} \|f\|_{1,\text{loc}} \leq \sup_{a \leq x \leq a+T} |f(x)|.$$

2.3 Notion de fonction “périodisée”, calcul de ses coefficients de Fourier.

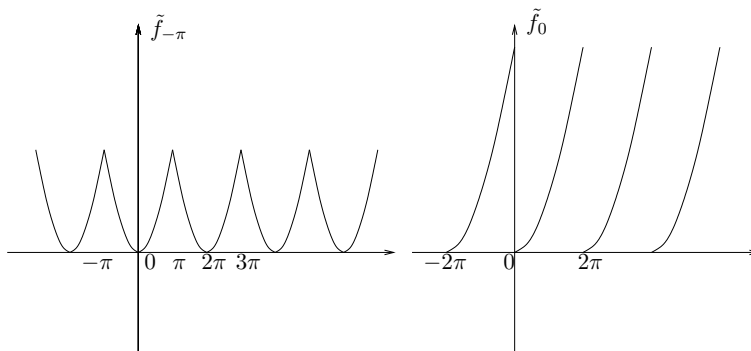


FIG. 4 – Deux différentes 2π -périodisations de la fonction $f(x) = x^2$ définie sur $[-\pi, \pi]$ puis sur $[0, 2\pi]$.

Les séries (2.1) ou (2.2) définissent des fonctions T -périodiques sur \mathbb{R} . Toute fonction f sur $[a, a + T)$ sera identifiée avec son prolongement \tilde{f}_a T -périodique sur \mathbb{R} défini par $\tilde{f}_a(kT + t) = f(t), t \in [a, a + T)$ pour $k \in \mathbb{Z}$. On note avec un indice a la fonction périodisée \tilde{f}_a pour bien indiquer qu'elle dépend du point a . On prendra en général $a = 0$ pour simplifier, mais il faudra le rétablir pour certaines formules. Cette périodisation de la fonction f est un peu délicate car non seulement elle dépend de la période T de périodisation, mais encore elle dépend de l'intervalle-période $(a, a + T)$. Par exemple le prolongement 2π -périodique de la fonction $f : t \rightarrow t^2$ sur $[-\pi, \pi]$

n'est pas le même que celui de la fonction $f : t \rightarrow t^2$ définie sur $[0, 2\pi]$ (figure 4) même si l'intervalle période $(a, a + T)$ est toujours de longueur $T = 2\pi$! Précisons en remarquant que dans le premier (resp. second) cas $a = -\pi$ (resp. $a = 0$).

Plus généralement, soit une fonction f donnée sur un intervalle (a, b) avec $-\infty < a < b < +\infty$. On appelle développement de Fourier de f dans l'intervalle (a, b) , le développement de Fourier de la fonction périodique \tilde{f}_a , de période $T = b - a$, coïncidant avec f sur l'intervalle (a, b) . Observons que si $f(a) \neq f(b)$ et même si f est continue à droite en a et à gauche b , alors \tilde{f}_a est nécessairement discontinue aux points a, b et plus généralement aux points $a + kT$ avec $k \in \mathbb{Z}$ (voir la partie droite de la figure 4).

Le calcul des coefficients de Fourier de \tilde{f}_a se fait toujours par les formules (2.9), (2.10) et (2.11) à condition de remplacer, dans ces formules, la fonction f (non-périodique) par sa "périodisée" \tilde{f}_a . Alors, comme la fonction \tilde{f}_a est périodique, le commentaire du début du paragraphe 2.2 est valide et on peut calculer les coefficients de Fourier de la fonction \tilde{f}_a sur tout intervalle-période $[b, b + T]$ avec $b \neq a$.

Nous allons voir, sur l'exemple qui suit, la conséquence de ces différentes périodisations d'une fonction f non périodique sur le calcul des coefficients de Fourier (ils deviennent dépendants de l'intervalle-période sur lequel on travaille). Il faut donc bien distinguer la notion de fonction "périodisée" de celle de fonction périodique : une fonction périodique a un développement en série de Fourier indépendant de l'origine a de tout intervalle-période $(a, a + T)$, alors que ce développement est tributaire de cette origine pour la fonction "périodisée" \tilde{f}_a .

Exemple Soit la fonction $f(x) = x^2$, on choisit un intervalle-période de longueur $T = 2\pi$, si bien que $\omega = 1$. Pour la fonction $\tilde{f}_{-\pi}$, comme la fonction x^2 vérifie les hypothèses du théorème 2.2 du prochain paragraphe, on a le développement en série de Fourier suivant sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4}{k^2} \cos(kx). \quad (2.12)$$

Montrons-le.

La fonction f étant réelle, on va évidemment utiliser le développement (2.2) et les formules (2.11). Il suffit de calculer les a_k car la fonction x^2 étant réelle et paire sur $[-\pi, \pi]$ on a $b_k = 0$.

$$\text{On a } a_0 = c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{2\pi} \frac{x^3}{3} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}.$$

De plus $a_k = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(kx) dx$, par une première intégration par parties on vérifie que $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(kx) dx = -\frac{2}{k} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(kx) dx$. Une deuxième intégration par parties donne $\int_{-\pi}^{\pi} x \sin(kx) dx = -\frac{2\pi}{k} (-1)^k$. Au total

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(kx) dx = -\frac{2}{k} \left(-\frac{2\pi}{k}\right) (-1)^k = \frac{4\pi}{k^2} (-1)^k,$$

et donc on a $a_k = \frac{2}{2\pi} \frac{4\pi}{k^2} (-1)^k = (-1)^k \frac{4}{k^2}$. Ce qui démontre (2.12).

Considérons maintenant l'intervalle-période $[0, 2\pi]$. On utilise toujours les formules (2.11), mais la fonction x^2 n'étant plus paire sur cet intervalle les b_k ne sont plus nuls.

On a $a_0 = c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{1}{2\pi} \frac{x^3}{3} \Big|_0^{2\pi} = \frac{4\pi^2}{3}$. On constate déjà que le terme constant a_0 est différent du précédent.

De plus $a_k = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \cos(kx) dx$, par une première intégration par parties on vérifie que $\int_0^{2\pi} x^2 \cos(kx) dx = -\frac{2}{k} \int_0^{2\pi} x \sin(kx) dx$. Une deuxième intégration par parties donne $\int_0^{2\pi} x \sin(kx) dx = -\frac{2\pi}{k}$. Au total

$$\int_0^{2\pi} x^2 \cos(kx) dx = -\frac{2}{k} \left(-\frac{2\pi}{k}\right) = \frac{4\pi}{k^2},$$

et donc on a $a_k = \frac{2}{2\pi} \frac{4\pi}{k^2} = \frac{4}{k^2}$.

Par la même technique de l'intégration par parties, on laisse au lecteur le soin de vérifier que $b_k = -\frac{4\pi}{k}$.

Sur $[0, 2\pi]$, pour la fonction \tilde{f}_0 , on a donc le développement

$$x^2 = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2} \cos(kx) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4\pi}{k} \sin(kx), \quad (2.13)$$

très différent de celui de $\tilde{f}_{-\pi}$ sur $[-\pi, \pi]$.

Prenons maintenant le périodisée $\tilde{f}_{a=-\pi}$ et calculons ses coefficients de Fourier lorsqu'on les estime sur l'intervalle-période $[\pi, 3\pi]$ de longueur 2π . Ils doivent être les mêmes que ceux qui sont calculés sur $[-\pi, \pi]$ puisque la fonction $\tilde{f}_{a=-\pi}$ est 2π -périodique. On sait que

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{3\pi} \tilde{f}_{a=-\pi}(x) dx.$$

Si $x \in [\pi, 3\pi]$, par définition de la périodisée, on a $\tilde{f}_{a=-\pi}(x - 2\pi) = \tilde{f}_a(x') = f(x')$ avec $x' \in [-\pi, \pi]$. Si bien que, par le changement de variable $x \rightarrow x - 2\pi$, l'intervalle $[\pi, 3\pi]$ est transporté en $[-\pi, \pi]$ où $\tilde{f}_{a=-\pi} = f$. On a donc

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{3\pi} \tilde{f}_{a=-\pi}(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

Le coefficient a_0 calculé sur $[-\pi, \pi]$ par f , sera le même que celui calculé sur $[\pi, 3\pi]$ par $\tilde{f}_{a=-\pi}$. Le même constat peut être fait pour les calculs des a_k et b_k avec $k \geq 1$. Cette remarque vaut pour toute fonction périodisée \tilde{f}_a . \square

Le développement en série de Fourier de la fonction $f(x) = x^2$ sur $[-\pi, \pi]$ permet de calculer la valeur exacte de la somme de séries numériques remarquables. Par exemple prenons (2.12) pour $x = \pi$, il vient

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4}{k^2} \cos(k\pi), \quad (2.14)$$

soit

$$\frac{2\pi^2}{3} = 4\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} + \cdots\right)$$

ou encore

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2},$$

c'est la célèbre formule démontrée par Euler en 1735 (voir http://fr.wikipedia.org/wiki/Problème_de_Bâle). Sa "preuve" se lit facilement et elle est astucieuse. Évidemment elle n'utilise pas la technique de la série de Fourier!).

2.4 Convergence des séries de Fourier au sens des fonctions

Il existe une théorie de la convergence de ces séries en théorie des distributions, c'est tout à fait hors sujet. Même pour les fonctions, les résultats ne sont pas triviaux. Nous allons seulement préciser quelques difficultés et mentionner, sans démonstration, deux résultats de convergence.

La question essentielle est la suivante : Une fonction f est-elle égale à la somme d'une série trigonométrique ? L'examen des fonctions $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega x}$ et $\sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x))$ donne aisément, comme nous l'avons vu, la forme des coefficients de ces séries, ce sont les coefficients de Fourier. Mais pouvoir les calculer, pour une fonction f donnée, ne signifie pas que la série (ainsi obtenue) converge vers f et, si oui, en quel sens ? Par exemple si l'on suppose seulement que f est localement sommable, on peut évidemment calculer les c_k mais il n'y a pas lieu d'espérer que la série de Fourier $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega x}$ converge en tout point vers $f(x)$ puisqu'une modification de f sur un ensemble de mesure nulle ne change pas les coefficients de Fourier. Tout au plus peut-on s'attendre à une convergence *presque partout* (c'est-à-dire pour presque toutes les valeurs de x) ou en moyenne (c'est-à-dire dans l'espace des classes de fonctions f intégrables sur l'intervalle $(a, a + T)$). En fait il n'en est rien. Supposons une hypothèse plus forte, à savoir f continue. Alors on serait "en droit" d'espérer une convergence en tout point, mais il n'en est encore rien ; il existe des fonctions continues (évidemment les c_k sont calculables) qui ne sont pas sommes de leur série de Fourier. Il faut donc une hypothèse plus forte que la continuité pour espérer la convergence. Donnons cependant (sans démonstration) deux résultats de convergence dus à Dirichlet.

Théorème 2.1. (*théorème de convergence locale*) *Si la fonction périodique f de période T est continue en un réel x et dérivable en x alors la série de Fourier de f converge en x et on a l'égalité $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega x}$.*

Les hypothèses de ce théorème 2.1 peuvent être affaiblies, par exemple en supposant seulement f dérivable à gauche et à droite en x . On a aussi le

Théorème 2.2. (*théorème de convergence globale*) Si la fonction périodique f est continûment dérivable (de classe C^1 comme on dit) au voisinage de tout point d'un intervalle I de \mathbb{R} , alors sa série de Fourier converge uniformément vers f sur I .

La fonction x^2 est évidemment de classe C^1 (elle est même infiniment régulière) et donc l'égalité dans (2.13) est licite. Observons aussi que la fonction x^2 n'a rien de périodique et il est donc indispensable de noter que (2.13) n'est vraie que sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ (c'est en fait le développement en série de Fourier de la fonction x^2 définie sur $[0, 2\pi]$ et "périodisée" de période 2π , voir l'item *i*) de la remarque 2.5).

Les théorèmes de convergence précédents ne sont pas les seuls possibles, par exemple il existe un théorème de convergence en moyenne quadratique qui affirme que si $f \in L^2(T)$ ($L^2(T)$ est l'espace des fonctions de carré sommable sur l'intervalle $(a, a+T)$) alors la série de ses coefficients de Fourier $c_k(f)$ correspondants est de carré sommable et

$$\boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2 = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} |f(x)|^2 dx,} \quad (2.15)$$

qui est l'égalité de *Bessel-Parseval*.

Dans le cas d'une série de cosinus et de sinus l'égalité de Bessel-Parseval s'écrit

$$\boxed{|a_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2}{2} = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} |f(x)|^2 dx.} \quad (2.16)$$

De plus on a la convergence en moyenne quadratique de la série de Fourier vers f qui s'exprime par :

$$\boxed{\lim_{\substack{M \rightarrow \infty \\ N \rightarrow \infty}} \int_a^{a+T} \left| \left(\sum_{k=-M}^{+N} c_k(f) e^{ik\omega x} \right) - f(x) \right|^2 \frac{dx}{T} = 0.} \quad (2.17)$$

3 Transformation de Fourier

3.1 Introduction

Essentiellement nous allons présenter la transformation de Fourier d'une variable. Elle concerne les fonctions f *non périodiques*. Notons par $f_T(x)$ la fonction égale à $f(x)$ sur l'intervalle $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ et prolongée en dehors de cet intervalle de façon à être périodique de période T sur \mathbb{R} . Pour $T \rightarrow \infty$, $f_T \rightarrow f$ uniformément sur tout intervalle fini. Comme f_T est périodique de période T , f_T admet un développement en série de Fourier. Si f (donc f_T) est suffisamment régulière, on peut écrire (par exemple par le théorème 2.2)

$$\left\{ \begin{array}{l} f_T(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{n,T} e^{ni\omega x}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \\ \text{avec} \\ c_{n,T} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-ni\omega x} dx \end{array} \right., \quad (3.1)$$

en choisissant de calculer les coefficients de Fourier $c_{n,T}$ sur l'intervalle $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ où $f_T(x) = f(x)$. Cette technique de périodisation a été largement détaillée au paragraphe 2.3.

Le développement en série de Fourier est assez naturel, mais la transformation de Fourier l'est un peu moins. Considérons un intervalle $I = [\lambda, \lambda + \Delta\lambda]$. Les valeurs de n pour lesquelles $2\pi\lambda \leq n\omega \leq 2\pi(\lambda + \Delta\lambda)$, soit $\lambda \leq \frac{n}{T} \leq (\lambda + \Delta\lambda)$, sont en nombre $[2\pi\frac{\Delta\lambda}{\omega}] = [T\Delta\lambda]$ (où $[x]$ désigne la partie entière du nombre réel x , naturellement si x est entier on a $[x] = x$), avec une erreur inférieure ou égale à 1. En effet considérons l'ensemble discret E_k défini par $E_k = \{x_k = k\frac{1}{T}, k \in \mathbb{Z}\}$ de la droite \mathbb{R} (cet ensemble est considéré indépendamment d'une origine). Le nombre $\frac{1}{T}$ est le pas de cette discrétisation. L'ensemble discret E_k est indiqué par des cercles et les bornes de l'intervalle I par des croix sur la figure 5.

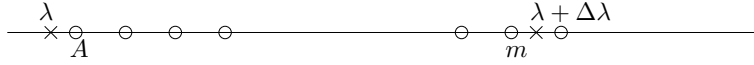


FIG. 5 – Accumulation relative des coefficients de Fourier à grande période.

Pour T assez grand, c'est possible car, dans ce qui suit, son destin est de tendre vers l'infini, nous aurons un certain nombre m de points de E_k inclus dans l'intervalle I quelles que soient les bornes de celui-ci. Nous allons évaluer ce nombre m . Orientons la droite de la figure 5 de gauche à droite et prenons pour origine des abscisses la borne gauche λ de l'intervalle I . Posons $m = [T\Delta\lambda]$. Soit A le premier point de l'ensemble E_k , d'abscisse x_1 , qui appartient à I . On a, par définition de x_1 , $0 \leq x_1 \leq \frac{1}{T}$. Les points de E_k , à droite de A , seront les points d'abscisses $x_i = x_1 + (i - 1)\frac{1}{T}$ pour $i = 2, 3, \dots, k, \dots$. L'entier m peut-être défini par défaut, alors $m < T\Delta\lambda$ et $(m + 1) > T\Delta\lambda$, dans ce cas on a :

$$x_{m+2} = x_1 + (m + 1)\frac{1}{T} \geq x_1 + T\Delta\lambda\frac{1}{T} \geq \Delta\lambda,$$

et $x_{m+2} \notin I$. Par ailleurs $x_{m+1} = x_1 + m\frac{1}{T}$, mais pour ce point on a une incertitude : si $x_1 < \Delta\lambda - m\frac{1}{T}$ alors $x_{m+1} \in I$, mais si $x_1 > \Delta\lambda - m\frac{1}{T}$ alors $x_{m+1} \notin I$. Dans ce cas on a donc au plus $(m + 1)$ points de E_k inclus dans I .

Par ailleurs si l'entier m est défini par excès alors $m > T\Delta\lambda$ et $x_{m+1} = x_1 + m\frac{1}{T}$ soit $x_{m+1} \geq m\frac{1}{T} > T\Delta\lambda\frac{1}{T} = \Delta\lambda$. Dans ce cas on a seulement m points de E_k dans I .

Finalement, dans tous les cas, le nombre m d'entiers n tels que $\lambda \leq \frac{n}{T} \leq (\lambda + \Delta\lambda)$ est égal à $[T\Delta\lambda]$ avec une erreur inférieure ou égale à un.

Le paquet de termes correspondant $\sum_{2\pi\lambda \leq n\omega \leq 2\pi(\lambda + \Delta\lambda)} c_{n,T} e^{ni\omega x}$ peut approximativement s'écrire pour des grandes valeurs de T et des petites valeurs de $\Delta\lambda$ (en supposant que chacun des $[2\pi\frac{\Delta\lambda}{\omega}]$ termes de cette somme est peu différent du premier terme), $c_\lambda [2\pi\frac{\Delta\lambda}{\omega}] e^{2i\pi\lambda x}$ ou encore, par définition de ω ,

$c_\lambda [T\Delta\lambda] e^{2i\pi\lambda x}$. D'après (3.1) on a ,

$$c_\lambda = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-2i\pi\lambda x} dx.$$

Si $C(\lambda) = Tc_\lambda$, le paquet de termes tel que $2\pi\lambda \leq n\omega \leq 2\pi(\lambda + \Delta\lambda)$, s'écrit donc

$$\left\{ \begin{array}{l} f_T(x) = \sum_{2\pi\lambda \leq n\omega \leq 2\pi(\lambda + \Delta\lambda)} c_{n,T} e^{ni\omega x} \approx C(\lambda)(\Delta\lambda) e^{2i\pi\lambda x}, \\ \text{avec} \\ C(\lambda) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-2i\pi\lambda x} dx. \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Passons aux limites $\Delta\lambda \rightarrow 0$ et $T \rightarrow +\infty$. Pour $T \rightarrow \infty$, on peut remplacer $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}$ par $\int_{-\infty}^{\infty}$. Par ailleurs la somme $\sum_{n=-\infty}^{\infty}$ peut s'écrire comme la somme de tous les paquets correspondants aux intervalles $(0, \Delta\lambda), (\Delta\lambda, 2\Delta\lambda), \dots, (k\Delta\lambda, (k+1)\Delta\lambda), \dots, (-\Delta\lambda, 0), (-2\Delta\lambda, -\Delta\lambda), \dots, -(k+1)\Delta\lambda, -k\Delta\lambda), \dots$, de longueur $\Delta\lambda$ qui s'écrivent sous la forme (3.2). Plus précisément, sur chaque intervalle $I_k = [k\Delta\lambda, (k+1)\Delta\lambda]$, le paquet de termes $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{n,T} e^{ni\omega x}$ s'écrit approximativement $C(\lambda_k) \Delta\lambda e^{2i\pi\lambda_k x}$, l'indice k indiquant que le λ_k est associé à la borne inférieure de l'intervalle I_k . Dès lors, en prenant tous les paquets

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{n,T} e^{ni\omega x} \approx \sum_k C(\lambda_k) e^{2i\pi\lambda_k x} \Delta\lambda.$$

Passons aux limites précédentes. La deuxième formule (3.2) ne pose aucun problème lorsque $T \rightarrow \infty$. Lorsque $\Delta\lambda \rightarrow 0$, le nombre d'intervalles tend vers l'infini et, par définition de l'intégrale de Riemann, $\Delta\lambda$ apparaissant comme un pas d'intégration, $\sum_k C(\lambda_k) e^{2i\pi\lambda_k x} \Delta\lambda \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} C(\lambda) e^{2i\pi\lambda x} d\lambda$.

En passant aux limites dans (3.2), puisque, on le rappelle, $f_T \rightarrow f$, on arrive ainsi intuitivement aux formules

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\lambda) e^{2i\pi\lambda x} d\lambda, \quad (3.3)$$

avec

$$C(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2i\pi\lambda x} dx. \quad (3.4)$$

La série de Fourier est remplacée par l'intégrale de Fourier (3.3), le coefficient de Fourier associé étant donné par (3.4).

Cela n'a rien d'une démonstration, nous proposons ces remarques, qui peuvent être justifiées lorsque f a de "bonnes" propriétés, pour faire le lien entre la série de Fourier et la transformation de Fourier. Ainsi la définition de la transformée de Fourier pourra sembler plus "naturelle", elle apparaît comme un "passage à la limite" (du discret au continu) des séries de Fourier.

3.2 Définition de la transformation de Fourier

La fonction f étant une fonction à valeurs complexes de la variable réelle x , on appelle image de Fourier ou transformée de Fourier de f la fonction à valeurs complexes $C(\lambda)$ de la variable réelle λ définie par

$$\boxed{C(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi\lambda x} f(x) dx.} \quad (3.5)$$

Notons qu'en particulier $C(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$.

On écrit aussi

i) $C = \mathcal{F}f$, à savoir $C(\lambda) = \mathcal{F}(f(x))$,

ii) $C = \hat{f}$.

Notation : La transformée de Fourier $C(\lambda)$ de f est aussi notée, très usuellement, \hat{f} (f "chapeau"). Ces deux notations de la transformée de Fourier seront utilisées dans la suite. \square

Mentionnons qu'il existe une autre écriture de la transformée de Fourier. Pour $f \in L^1$, on pose pour ω réel, $\omega \neq 0$ et $h > 0$

$$D(\lambda) = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\lambda x} f(x) dx.$$

On vérifie que $D(\lambda) = \frac{1}{h} C(\frac{\omega}{2\pi}\lambda)$, C étant la transformée précédente.

Dans le cadre du traitement du signal le rôle de la variable λ est souvent joué par la fréquence ξ , la variable x ayant alors une signification temporelle.

À côté de la transformation de Fourier \mathcal{F} on définit la transformation :

$$C_1 = \overline{\mathcal{F}}f \text{ avec } C_1(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi\lambda x} f(x) dx.$$

A priori C_1 n'a rien à voir avec C , c'est la raison pour laquelle nous prenons la précaution d'écrire plus haut l'expression "à côté".

Les applications $C = \mathcal{F}f$ et $C_1 = \overline{\mathcal{F}}f$ de \mathbb{R} dans \mathbb{C} existent évidemment si f est sommable ($f \in L^1$) et dans ce cas ce sont des *fonctions continues de λ* . (La fonction $e^{\pm 2i\pi\lambda x} f(x)$ est continue en λ pour tout x fixé et elle est majorée par la fonction sommable (par hypothèse) $|f(x)|$, elle est donc continue d'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue (voir annexe 1). De plus ces fonctions sont *bornées* car

$$|C(\lambda)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \|f\|_{L^1},$$

de même on a $|C_1(\lambda)| \leq \|f\|_{L^1}$.

On démontre aussi (autre théorème dû à Lebesgue) que $C(\lambda) \rightarrow 0$ pour $\lambda \rightarrow \pm\infty$.

Remarque 3.1. (*importante*) $\mathcal{F}[\cos(x)](\lambda)$ n'existe pas car la fonction $\cos(x)$ n'est pas dans L^1 . On ne peut donc pas étudier les fonctions périodiques par la transformation de Fourier (TF). Alors, pour pouvoir utiliser la TF il y a deux voies :

- 1) Limiter les fonctions périodiques à un intervalle borné $[-A, A]$ en les prenant nulles en-dehors. C'est-à-dire que l'on définit la transformée de Fourier de la fonction tronquée à $[-A, A]$ par :

$$\int_{-A}^A e^{-2i\pi\lambda x} f(x) dx. \quad (3.6)$$

Si on appelle $g = \tilde{f}_{-A}$ la périodisée de la fonction f définie à partir de l'intervalle $[-A, A]$, qui est $2A$ -périodique, (3.6) s'écrit

$$C_g(\lambda) = \int_{-A}^A e^{-2i\pi\lambda x} g(x) dx.$$

Alors si on considère (2.9) on a

$$c_k = C_k(g) = \frac{1}{2A} \int_{-A}^A g(x) e^{-2i\pi \frac{k}{2A} x} dx.$$

En observant ces deux intégrales, on voit que, pour $\lambda = \frac{k}{2A}$, $C_g(\lambda) = 2AC_k(g)$, on retrouve le $k^{\text{ième}}$ coefficient du développement en série de Fourier de g (c'est-à-dire de la fonction f périodisée) au facteur $2A$ près. La formule (3.6) donne le spectre continu de la fonction f tronquée à $[-A, A]$; pour des valeurs "discrètes" de λ on retrouve, au facteur $2A$ près les coefficients de Fourier.

Notons que dans les applications concrètes un signal n'est jamais éternellement périodique.

- 2) Généraliser la notion de fonction avec les distributions et définir la TF des distributions de L. Schwartz (voir l'ouvrage [1]).

L'examen de la voie 2) ne sera pas évoqué, bien qu'un résultat de la TF des distributions sera utilisé dans l'annexe 2.

Exemple élémentaire de calcul d'une transformée de Fourier. Soit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } |x| \leq A \\ 0 & \text{pour } |x| > A \end{cases}, \quad (3.7)$$

On reconnaît une fonction "créneau" centrée à l'origine. Sa transformée de Fourier est

$$C(\lambda) = \int_{-A}^A e^{-2i\pi\lambda x} dx = \int_{-A}^A (\cos(2\pi\lambda x) - i \sin(2\pi\lambda x)) dx.$$

L'intégrale du sinus est nulle (intégration d'une fonction impaire sur un intervalle symétrique). Par raison de parité on a $\int_{-A}^A \cos(2\pi\lambda x) dx = 2 \int_0^A \cos(2\pi\lambda x) dx = \frac{\sin 2\pi\lambda A}{\pi\lambda}$. On a donc

$$C(\lambda) = \frac{\sin 2\pi\lambda A}{\pi\lambda}. \quad \square$$

On obtient ainsi pour $C(\lambda)$ un *sinus cardinal*, définition utilisée pour désigner le rapport du sinus à son argument, terminologie souvent utilisée dans les applications.

3.3 Formule de réciprocité entre \mathcal{F} et $\overline{\mathcal{F}}$ dans le cas des fonctions.

À la formule (3.4) est associée la formule (3.3), mais (3.3) n'a pas nécessairement un sens car si $f \in L^1$, $C(\lambda)$ est bornée mais non nécessairement sommable, de sorte que (3.3) n'aura pas nécessairement un sens dans cet espace. Par exemple si f est donnée par (3.7), évidemment $f \in L^1$, on a vu que $C(\lambda) = \frac{\sin(2\pi\lambda a)}{\pi\lambda}$ et il est clair que $\frac{\sin(2\pi\lambda a)}{\pi\lambda} \notin L^1$.

Cependant si $f \in L^1$ et si, de surcroît, $\hat{f} \in L^1$ on a, sous une hypothèse supplémentaire de continuité de f , la formule de réciprocité $\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}[f] = f$. La preuve est non-triviale car elle utilise l'introduction d'une fonction auxiliaire g_n convenable.

Mais, comme fonction bornée, $C(\lambda)$ a un sens comme distribution *temperée* (pour les aficionados!) qui admet une image par $\overline{\mathcal{F}}f$. On peut alors démontrer, dans le cadre de la théorie des distributions, la formule de réciprocité (on donne une idée de la démonstration à l'annexe 2).

La preuve d'une possible réciprocité, dans le cas des fonctions L^1 , commence par les deux propositions préparatoires suivantes :

Proposition 3.1. *Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, alors $f\hat{g}$ et $\hat{f}g$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$ et on a*

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\hat{g}(t)dt = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x)g(x)dx.$$

Démonstration On sait que \hat{g} est bornée donc, puisque $f \in L^1(\mathbb{R})$, $f\hat{g} \in L^1(\mathbb{R})$. De même on a $g\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. On constate que la fonction des deux variables indépendantes $e^{-2i\pi tx} f(t)g(x) \in L^1(\mathbb{R}^2)$, on peut donc appliquer le théorème de Fubini (voir annexe 1) :

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\hat{g}(t)dt = \int_{\mathbb{R}} f(t) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi tx} g(x)dx \right) dt,$$

d'où

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\hat{g}(t)dt = \int_{\mathbb{R}} g(x) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi tx} f(t)dt \right) dx = \int_{\mathbb{R}} g(x)\hat{f}(x)dx. \quad \square$$

Proposition 3.2. *(Transformée de Fourier d'une translatée et translatée d'une transformation de Fourier) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, en notant par τ_a la translation $\tau_a f(x) = f(x - a)$, on a les relations suivantes :*

i) $\widehat{\tau_a f}(\xi) = e^{-2i\pi a\xi} \hat{f}(\xi),$

ii) $(\tau_a \hat{f})(\xi) = (\widehat{e^{2i\pi ax} f})(\xi).$

Démonstration La preuve est évidente, ce n'est qu'un jeu d'écriture,

i) Le changement de variable $t = x - a$ donne

$$\begin{aligned} \widehat{\tau_a f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\xi x} f(x - a)dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\xi(a+t)} f(t)dt \\ &= e^{-2i\pi\xi a} \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\xi t} f(t)dt = e^{-2i\pi\xi a} \hat{f}(\xi). \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned}
ii) \quad (\tau_a \hat{f})(\xi) &= \hat{f}(\xi - a) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi(\xi-a)x} f(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\xi x} e^{-2i\pi\xi a} f(x) dx dt = (\widehat{e^{2i\pi a x} f})(\xi). \quad \square
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Théorème 3.1. (Formule de réciprocity) Si f et \hat{f} sont dans $L^1(\mathbb{R})$, alors

$$\overline{\mathcal{F}(\hat{f})}(t) = f(t),$$

en tout point t où f est continue.

Remarque 3.2. Cette formule de réciprocity est valide pour f appartenant à un autre espace, l'espace \mathcal{S} (voir la proposition 3.4).

Démonstration du théorème 3.1 Dans la preuve de la formule de réciprocity il est opportun de connaître une fonction positive g_n dont l'intégrale est facile à calculer et qui a une transformée de Fourier positive. Posons pour tout $n \geq 1$, $g_n(x) = e^{-\frac{2\pi}{n}|x|}$, dont la transformée de Fourier est $\hat{g}_n(\xi) = \frac{1}{\pi} \frac{n}{1+n^2\xi^2}$. On comprendra plus loin pourquoi ce choix de g_n est commode.

Les fonctions g_n et \hat{g}_n sont toutes deux intégrables. On applique la proposition 3.1 aux fonctions f et $e^{2i\pi t x} g_n(x)$ et on utilise le *ii)* de la proposition 3.2, il vient

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x) e^{2i\pi t x} g_n(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(u) (\widehat{e^{2i\pi t x} g_n})(u) du = \int_{\mathbb{R}} f(u) \hat{g}_n(u - t) dt. \tag{3.10}$$

La preuve de la formule de réciprocity utilise les limites lorsque $n \rightarrow \infty$ de la première et de la troisième intégrale de (3.10). D'abord étudions la limite de la première intégrale Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé, la suite $(g_n)_n$ (considéré donc comme fonction de n) est positive, croissante et converge vers 1. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|\hat{f}(x) e^{2i\pi t x} g_n(x)| \leq |\hat{f}(x)|.$$

Le théorème de la convergence dominée (voir annexe 2) entraîne que l'intégrale de gauche admet une limite, soit

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x) e^{2i\pi t x} g_n(x) dx &= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x) e^{2i\pi t x} (\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)) dx = \dots \\
\dots &= \overline{\mathcal{F} \hat{f}}(x) e^{2i\pi t x} dx = \overline{\mathcal{F} \hat{f}}(t).
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Ensuite étudions la limite de la troisième intégrale. Si on prouve que cette intégrale converge vers f , si f est continue en la variable t , le résultat sera prouvé. Remarquons d'abord que, grâce au changement de variable $u = n\xi$, on peut écrire

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{g}_n(\xi) d\xi = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a \frac{1}{\pi} \frac{n}{1+n^2\xi^2} d\xi = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+u^2} du.$$

On sait qu'une primitive de l'intégrande est $\arctg(u)$ et que pour $u = \pm\infty$, $\arctg(u) = \pm\frac{\pi}{2}$. La dernière intégrale écrite vaut donc 1. Cette remarque fait comprendre le choix, a priori arbitraire, de g_n .

Considérons alors $\int_{\mathbb{R}} f(u)\widehat{g}_n(u-t)dt - f(t)$, d'après la remarque précédente on peut écrire

$$\int_{\mathbb{R}} f(u)\widehat{g}_n(u-t)dt - f(t) = \int_{\mathbb{R}} f(u)\widehat{g}_n(u-t)dt - \int_{\mathbb{R}} f(t)\widehat{g}_n(\xi)d\xi,$$

et, en posant $\xi = u - t$, dans la première intégrale du membre de droite ,

$$\int_{\mathbb{R}} f(u)\widehat{g}_n(u-t)dt - f(t) = \int_{\mathbb{R}} (f(\xi+t) - f(t))\widehat{g}_n(\xi)d\xi. \quad (3.12)$$

Finalement, tout revient à montrer que l'intégrale de droite tend vers zéro lorsque $n \rightarrow \infty$. Utilisons la continuité de f . Puisque f est continue au point t , pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si $|y-t| \leq \eta$ alors $|f(y) - f(t)| \leq \epsilon$. Le second membre de (3.12) peut se couper en deux

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} (f(\xi+t) - f(t))\widehat{g}_n(\xi)d\xi &= \int_{|\xi| \leq \eta} (f(\xi+t) - f(t))\widehat{g}_n(\xi)d\xi + \dots \\ \dots &+ \int_{|\xi| > \eta} (f(\xi+t) - f(t))\widehat{g}_n(\xi)d\xi. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Considérons la première intégrale du second membre de (3.13)

$$\begin{aligned} \left| \int_{|\xi| \leq \eta} (f(\xi+t) - f(t))\widehat{g}_n(\xi)d\xi \right| &\leq \int_{|\xi| \leq \eta} |f(\xi+t) - f(t)| \widehat{g}_n(\xi)d\xi \dots \\ \dots &\leq \epsilon \int_{|\xi| \leq \eta} \widehat{g}_n(\xi)d\xi, \end{aligned} \quad (3.14)$$

comme, nous savons que $\int_{\mathbb{R}} \widehat{g}_n(\xi)d\xi = 1$, on a

$$\left| \int_{|\xi| \leq \eta} (f(\xi+t) - f(t))\widehat{g}_n(\xi)d\xi \right| \leq \epsilon.$$

Pour étudier la deuxième intégrale du second membre il faut encore deux résultats préliminaires.

$\alpha)$ On voit, sur l'expression de \widehat{g}_n donnée au début de la démonstration, que La fonction \widehat{g}_n est paire et donc

$$\int_{|\xi| > \eta} \widehat{g}_n(\xi)d\xi = \int_{\eta}^{\infty} \widehat{g}_n(\xi)d\xi + \int_{-\infty}^{-\eta} \widehat{g}_n(\xi)d\xi = 2 \int_{\eta}^{\infty} \widehat{g}_n(\xi)d\xi,$$

soit, en tenant compte de l'expression de \widehat{g}_n et de la primitive de la fonction $\frac{n}{1+n^2\xi^2}$ déjà exhibée,

$$\int_{|\xi| > \eta} \widehat{g}_n(\xi)d\xi = \frac{2}{\pi} \int_{\eta}^{\infty} \frac{n}{1+n^2\xi^2} d\xi = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \arctg(n\eta) \right) = 1 - \frac{2}{\pi} \arctg(n\eta)$$

β) Comme \widehat{g}_n est également positive et décroissante on a

$$\left| \int_{|\xi|>\eta} \widehat{g}_n(\xi) f(\xi+t) d\xi \right| \leq \widehat{g}_n(\eta) \|f\|_{L^1}.$$

Lorsque $n \rightarrow \infty$, les majorants des deux dernières inégalités tendent vers zéro. Dès lors la deuxième intégrale du second membre de (3.13) tend vers zéro

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|\xi|>\eta} (f(\xi+t) - f(t)) \widehat{g}_n(\xi) d\xi = 0. \quad (3.15)$$

Les assertions (3.14) et (3.15) prouvent que le second membre de (3.13) tend vers zéro lorsque $n \rightarrow \infty$, ce qu'il fallait démontrer.

3.4 Formules fondamentales et majorations

Supposons $f \in L^1$, f continue et dérivable avec $f' \in L^1$. Intégrons par parties, pour $\lambda \neq 0$, l'intégrale $\int_{-A}^A e^{-2i\pi\lambda x} f(x) dx$. Il vient, si f est sommable en la variable ξ

$$\int_{-A}^A e^{-2i\pi\lambda x} f(x) dx = \left[\frac{e^{-2i\pi\lambda x} f(x)}{-2i\pi\lambda} \right]_{x=-A}^{x=A} - \int_{-A}^A \frac{e^{-2i\pi\lambda x}}{-2i\pi\lambda} f'(x) dx. \quad (3.16)$$

Faisons tendre A vers $+\infty$. Le terme entre crochets tend vers zéro. Montrons en effet que $f(x) \rightarrow 0$ lorsque $|x| \rightarrow \infty$; on a

$$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t) dt.$$

Comme f' est sommable par hypothèse, $f(x)$ a bien une limite finie lorsque $x \rightarrow \pm\infty$ à savoir

$$f(\pm\infty) = f(0) + \int_0^{\pm\infty} f'(t) dt;$$

mais cette limite ne peut être $\neq 0$ sinon f ne serait pas sommable. Ce qui conclut.

Dans (3.16), le terme intégral du second membre a pour limite l'intégrale puisque f' est sommable. Au total, pour $\lambda \neq 0$ on a donc

$$C(\lambda) = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A e^{-2i\pi\lambda x} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2i\pi\lambda x}}{2i\pi\lambda} f'(x) dx,$$

ou encore

$$(2i\pi\lambda)C(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi\lambda x} f'(x) dx = \mathcal{F}f'. \quad (3.17)$$

Remarquons que cette formule est encore valable, par continuité, pour $\lambda = 0$ car les deux membres sont alors nuls : le premier parce qu'il contient λ , le second parce qu'il vaut alors $\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)dx = f(\infty) - f(-\infty) = 0$.

On déduit de cette formule l'importante majoration suivante :

$$\boxed{|2\pi\lambda|C(\lambda)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|dx = \|f'\|_{L^1}.}$$

Plus généralement, si f est m fois continûment différentiable et si les dérivées d'ordre $\leq m$ sont sommables on a

$$\boxed{(2i\pi\lambda)^m C(\lambda) = \mathcal{F}f^{(m)},}$$

et

$$\boxed{|2\pi\lambda|^m |C(\lambda)| \leq \|f^{(m)}\|_{L^1}.} \quad (3.18)$$

On a naturellement les mêmes formules avec l'opérateur $\overline{\mathcal{F}}$ à condition de remplacer $2i\pi\lambda$ par $-2i\pi\lambda$.

Cherchons maintenant si $C(\lambda)$ est dérivable. Formellement on a :

$$C'(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} (-2i\pi x) e^{-2i\pi\lambda x} f(x) dx$$

soit $|C'(\lambda)| \leq \|2\pi x f(x)\|_{L^1}$. Cette dérivation sous le signe intégral est légitime si l'expression ainsi obtenue est une intégrale convergente, uniformément par rapport à λ lorsque λ parcourt un intervalle fini. C'est le cas si la fonction $x f(x)$ est sommable. On a alors

$$C'(\lambda) = \mathcal{F}[-2i\pi x f(x)].$$

Plus généralement, si la fonction $x^m f(x)$ est aussi sommable, alors $C(\lambda)$ est m fois continûment différentiable et l'on a :

$$\boxed{C^{(m)}(\lambda) = \mathcal{F}[(-2i\pi x)^m f(x)]}$$

soit

$$|C^{(m)}(\lambda)| \leq \|(2\pi x)^m f(x)\|_{L^1} \quad (3.19)$$

En clair, plus f est dérivable (avec des dérivées sommables) plus $C(\lambda)$ est décroissante à l'infini (c'est la traduction de (3.18)) ; plus f est décroissante à l'infini (c'est-à-dire décroît plus vite que toute puissance de x) plus $C(\lambda)$ est dérivable avec des dérivées bornées (c'est la traduction de (3.19)). Les mêmes résultats sont valables pour $\overline{\mathcal{F}}$ à condition de remplacer $2i\pi x$ par $-2i\pi x$.

Résumons les résultats précédents dans une proposition ;

Proposition 3.3. *Toute fonction f sommable admet une transformée de Fourier $\mathcal{F} = C$ avec*

$$C(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi\lambda x} f(x) dx$$

continue, bornée, tendant vers zéro pour $|\lambda| \rightarrow \infty$, telle que

$$|C(\lambda)| \leq \|f\|_{L^1}.$$

Soit $m \in \mathbb{N}$, si f est m fois continûment différentiable et si les dérivées d'ordre $\leq m$ sont sommables on a

$$\begin{cases} \mathcal{F}[f^{(m)}] = (2i\pi\lambda)^m C(\lambda) \\ |2\pi\lambda|^m |C(\lambda)| \leq \|f^{(m)}\|_{L^1} \end{cases} \quad (3.20)$$

Si la fonction $x^m f(x)$ est aussi sommable, alors $C(\lambda)$ est m fois continûment différentiable et l'on a :

$$\begin{cases} \mathcal{F}[(-2i\pi x)^m f(x)] = C^{(m)}(\lambda) \\ |C^{(m)}(\lambda)| \leq \|(2\pi x)^m f(x)\|_{L^1} \end{cases} \quad (3.21)$$

Il est donc pertinent, d'après ce qui précède, d'introduire maintenant l'espace \mathcal{S} de L. Schwartz.

Définition 3.1. *L'espace \mathcal{S} est l'espace des fonctions complexes, sur \mathbb{R} , indéfiniment dérivables, décroissantes, ainsi que chacune de leurs dérivées, plus rapidement que toute puissance de $\frac{1}{|x|}$ quand $|x| \rightarrow \infty$.*

Nous définissons cet espace car, d'une part on le rencontre fréquemment dans des cours plus avancés, d'autre part il intervient à la fin du paragraphe 3.5. Mentionnons trois propriétés nécessaires à ce paragraphe.

Proposition 3.4. 1) *Si $f, g \in \mathcal{S}$ alors leur produit est tel que $fg \in \mathcal{S}$,*
 2) *si $f \in \mathcal{S}$ alors on a $\hat{f} \in \mathcal{S}$,*
 3) *si $f \in \mathcal{S}$ on a la formule de réciprocity $\overline{\mathcal{F}\mathcal{F}}[f] = f$.*

Preuve : Elle est admise. Notons cependant que le 1) est une conséquence directe de la définition de l'espace \mathcal{S} et de la formule de Leibniz qui donne l'expression de la dérivée n^{ieme} du produit de deux fonctions par une somme des dérivées des fonctions elles-mêmes. \square

Commentaires : On sait que $f \in L^1 \not\Rightarrow \hat{f} \in L^1$ (voir le début de la section 3.3) . Par contre $f \in \mathcal{S} \Rightarrow \hat{f} \in \mathcal{S}$. En dépit de cette "bonne" propriété, la preuve de la formule de réciprocity dans \mathcal{S} n'est pas plus "naturelle" que dans L^1 car elle nécessite aussi l'introduction convenable de fonctions auxiliaires ; elle suit le même canevas de démonstration et elle est, de surcroît, un peu plus technique. Nous avons donc privilégié la preuve dans l'espace L^1 . \square

Soit toujours $C(\lambda) = \mathcal{F}[f(x)]$, une autre formule importante est donnée par :

$$\boxed{\frac{1}{|k|}C\left(\frac{\lambda}{k}\right) = \mathcal{F}[f(kx)]}, \quad (3.22)$$

pour k réel $\neq 0$. En effet par le changement de variable $kx = \xi$ il vient

$$\mathcal{F}[f(kx)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi\lambda x} f(kx) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi\lambda \frac{\xi}{k}} f(\xi) \frac{d\xi}{|k|} = \frac{1}{|k|} C\left(\frac{\lambda}{k}\right).$$

On a en particulier $C(-\lambda) = \mathcal{F}[f(-x)]$ et, par suite, si f est paire ou impaire, il en est de même pour C .

Le calcul de la transformée de Fourier d'une fonction f fait souvent appel à la théorie des fonctions analytiques d'une variable complexe. Par exemple, c'est le cas pour $f(x) = e^{-\pi x^2}$; on démontre que $\mathcal{F}[e^{-\pi x^2}](\lambda) = e^{-\pi \lambda^2}$. Par la formule (3.22) on en déduit que

$$\boxed{\mathcal{F}[e^{-kx^2}](\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{k}} e^{-\frac{\pi^2}{k} \lambda^2}}. \quad (3.23)$$

La théorie de la variable complexe n'est évidemment pas toujours nécessaire. On a vu un exemple avec f définie par (3.7).

Observons aussi que, sur le même exemple de calcul d'une transformée de Fourier de f définie par (3.7), bien que f ne soit pas continûment différentiable (discontinuités de la dérivée en $x = A$ et $x = -A$) ni même continue (mais elle est sommable!) la fonction $|\lambda C(\lambda)|$ est bornée : les conditions de la proposition (3.3) sont "seulement" suffisantes. Mais, par ailleurs, la fonction $|\lambda^2 C(\lambda)|$ n'est pas bornée.

3.5 Convolution et transformée de Fourier

Rappelons la convolution de deux fonctions f et g , elle est définie par :

$$(f \star g)(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau - t)g(t)dt.$$

Cet opérateur est essentiel dans le traitement du signal. Définissons maintenant deux notions classiques du traitement du signal

Définition 3.2. *La densité spectrale de puissance (DSP) (ou Power Spectral Density ou PSD en anglais) est le carré du module de la transformée de Fourier. Ainsi, si f est un signal et \hat{f} sa transformée de Fourier, la densité spectrale de puissance est définie par la fonction réelle positive $\xi \rightarrow S_f(\xi) = |\hat{f}(\xi)|^2 = \hat{f}(\xi)\overline{\hat{f}(\xi)}$.*

Introduisons la notation $\check{f}(t) = f(-t)$.

Définition 3.3. La fonction d'autocorrélation temporelle d'un signal f à temps continu est définie, pour tout $\tau \in \mathbb{R}$, par

$$R_f(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{f(t-\tau)} dt. \quad (3.24)$$

où \bar{f} est le complexe conjugué de f . On vérifie que $R_f(\tau) = (f \star \bar{f})(\tau)$.

Transformée de Fourier d'un produit de convolution Soient f et g deux fonctions sommables ($f, g \in L^1$) alors la fonction h définie par $h(x) = (f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt$ est définie pour presque tout x et, en utilisant Fubini

$$\|h\|_{L^1} = \int_{-\infty}^{\infty} |(f \star g)(x)| dx = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)| dx \right) dt \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1},$$

donc si $f, g \in L^1$, $f \star g \in L^1$.

Comme $f \star g$ est sommable on peut définir sa transformée de Fourier, soit

$$\mathcal{F}[(f \star g)(x)](\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} (f \star g)(x) e^{-2i\pi\lambda x} dx, \quad (3.25)$$

ou encore

$$\mathcal{F}[(f \star g)(x)](\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt \right) e^{-2i\pi\lambda x} dx. \quad (3.26)$$

Par une astuce d'écriture évidente on peut écrire

$$\mathcal{F}[(f \star g)(x)](\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt \right) e^{-2i\pi\lambda(x-t)} e^{-2i\pi\lambda t} dx, \quad (3.27)$$

et, par Fubini

$$\mathcal{F}[(f \star g)(x)](\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) e^{-2i\pi\lambda(x-t)} dx \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-2i\pi\lambda t} dt \right) \quad (3.28)$$

ou encore

$$\mathcal{F}[(f \star g)](\lambda) = \mathcal{F}[f](\lambda) \mathcal{F}[g](\lambda). \quad (3.29)$$

La transformée de Fourier du produit de convolution de deux fonctions sommables est le produit des transformées de Fourier.

Une même démonstration montre que (3.29) est vraie pour la transformée inverse, on a aussi pour $f, g \in L^1$

$$\overline{\mathcal{F}}[(f \star g)](\lambda) = \overline{\mathcal{F}}[f](\lambda) \overline{\mathcal{F}}[g](\lambda). \quad (3.30)$$

Relation fondamentale entre la densité spectrale de puissance et la fonction d'autocorrélation On peut maintenant exhiber une relation entre la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation (3.24) et la densité spectrale de puissance S_f (appelée encore *spectre* du signal) de la définition 3.2. En effet soit $f \in L^1$, d'après (3.29), en reprenant la notation \check{f} du début du paragraphe, on a :

$$\mathcal{F}[R_f](\lambda) = \mathcal{F}[f](\lambda) \cdot \mathcal{F}[\check{f}](\lambda) = \mathcal{F}[f](\lambda) \cdot \overline{\mathcal{F}[f](\lambda)} = S_f(\lambda). \quad (3.31)$$

Il suffit pour s'en convaincre de vérifier que

$$\mathcal{F}[\check{f}](\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \check{f}(x) e^{-2i\pi\lambda x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \check{f}(-x) e^{-2i\pi\lambda x} dx,$$

soit

$$\mathcal{F}[\check{f}](\lambda) = - \int_{+\infty}^{-\infty} \check{f}(x) e^{2i\pi\lambda x} dx = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2i\pi\lambda x} dx},$$

ce qui s'écrit

$$\mathcal{F}[\check{f}](\lambda) = \overline{\mathcal{F}[f](\lambda)}.$$

Ce qui démontre la relation (3.31).

La relation (3.31) s'énonce ainsi :

Proposition 3.5. *Soit un signal $f \in L^1$, le spectre du signal (ou densité spectrale de puissance) est la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation de f . On a :*

$$\boxed{S_f(\lambda) = \mathcal{F}[R_f](\lambda)}. \quad (3.32)$$

Cette proposition est au coeur de la SSA (Singular Spectral Analysis).

Transformée de Fourier d'un produit de fonctions On peut aussi se poser le problème suivant (d'un certain point de vue symétrique du premier) : étant donné un produit de fonctions, quelle est sa transformée de Fourier ? Soit $y(t) = f(t)g(t)$, et sa transformée de Fourier

$$\mathcal{F}[y](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)e^{-2i\pi\omega t} dt. \quad (3.33)$$

Formellement (sans préciser les espaces) on a $\overline{\mathcal{F}\mathcal{F}}[f] = f$, soit

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}f)(\lambda) e^{-2i\pi\lambda t} d\lambda.$$

Portons cette expression dans (3.33), il vient :

$$\mathcal{F}[y](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}f)(\lambda) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-2i\pi(\omega-\lambda)t} dt \right) d\lambda,$$

et, finalement

$$\mathcal{F}[fg](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f](\lambda)\mathcal{F}[g](\omega - \lambda)d\lambda = (\mathcal{F}[f] \star \mathcal{F}[g])(\omega). \quad (3.34)$$

La transformée de Fourier d'un produit de fonctions est le produit de convolution des transformées de Fourier des fonctions. \square

La "preuve" (nous avons écrit l'adverbe "formellement") que nous venons de proposer peut être justifiée si l'on prend f et g dans un "bon" espace. En effet soit l'espace \mathcal{S} , si $f, g \in \mathcal{S}$ alors, à la fois, $\hat{f}, \hat{g} \in \mathcal{S}$, $fg \in \mathcal{S}$ et $\overline{\mathcal{F}\mathcal{F}[f]} = f$ (voir proposition 3.4). On démontre aussi que si $f, g \in \mathcal{S}$ alors $f \star g \in \mathcal{S}$. Dès lors tout le calcul formel précédent a un sens, la formule (3.34) est donc justifiée dans \mathcal{S} .

"Last but not the least" il existe une théorie de la transformée de Fourier dans L^2 avec la formule remarquable de Plancherel-Parseval, que nous mentionnons simplement pour attiser l'intérêt du lecteur (voir [1]).

4 Annexe 1 : Théorèmes de Fubini-Lebesgue et de la convergence dominée de Lebesgue

Théorèmes de l'intégration

Théorème 4.1. (*Fubini-Lebesgue*) Soit $f(x, y)$ une fonction intégrable sur \mathbb{R}^2 : $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)| dx dy < \infty$, c'est-à-dire que $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$. Alors

1. pour presque tout x , la fonction $y \rightarrow f(x, y)$ est intégrable sur \mathbb{R} ,
2. la fonction définie presque partout par $x \rightarrow I(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$ est intégrable sur \mathbb{R} et

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy &= \int_{-\infty}^{\infty} I(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \right) \cdots \\ &\cdots = \int_{-\infty}^{\infty} dy \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \right). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Théorème 4.2. (*convergence dominée de Lebesgue*) Soit (f_n) une suite de fonctions $(f_n) \in L^1(\mathbb{R})$ telles que :

1. $f_n(x)$ converge simplement vers $f(x)$ pour $n \rightarrow \infty$, pour presque tout x ,
2. il existe $g \in L^1(\mathbb{R})$, $g \geq 0$, telle que, pour chaque $n \geq 1$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ presque partout.

Alors

- i) $f \in L^1(\mathbb{R})$
- ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ pour $n \rightarrow \infty$.

5 Annexe 2 : Formule de réciprocity dans le cadre des distributions

On a vu que la démonstration de la formule de réciprocity dans les espaces de fonctions L^1 et \mathcal{S} se fait “astucieusement” par l’introduction de fonctions auxiliaires convenables. Nous indiquons sommairement la “preuve” instructive de cette formule dans le cadre de la théorie des distributions car, même si elle nécessite de larges connaissances supplémentaires, elle est plus directe : elle n’utilise pas de fonctions auxiliaires. Évidemment, cette annexe est hors programme. Elle est fournie uniquement pour la culture des lecteurs intéressés ; nous espérons ainsi les encourager à lire [1].

Soit f une fonction sommable d’une variable. Par définition on peut écrire $\overline{\mathcal{F}}[C](x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi\lambda x} C(\lambda) d\lambda$, soit

$$\overline{\mathcal{F}}[C](x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi\lambda x} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-2i\pi\lambda\xi} d\xi \right) d\lambda.$$

On peut intervertir les deux intégrales à condition, théorème de Fubini, que l’intégrale double en (ξ, λ) soit sommable. Or ce n’est jamais le cas car on a $|e^{2i\pi\lambda x} f(\xi) e^{-2i\pi\lambda\xi}| = |f(\xi)|$ et donc puisque $\int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi)| d\xi$ est une constante finie bien déterminée,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi)| d\lambda d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi)| d\xi \right) = \infty.$$

On ne peut donc pas intervertir les deux signes de sommation. Mais faisons-le formellement, il vient

$$\overline{\mathcal{F}}[C](x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi\lambda(\xi-x)} d\lambda \right) d\xi. \quad (5.1)$$

Mais, par un résultat (facile) de la TF des distributions, on a $\mathcal{F}[1] = \delta$ où δ est la distribution de Dirac. Cette dernière formule s’écrit (incorrectement) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi\lambda x} d\lambda = \delta(x)$, et donc (5.1) devient

$$\overline{\mathcal{F}}[C](x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \delta(\xi - x) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \delta(x - \xi) d\xi = f(x).$$

La dernière égalité provient du fait que la distribution δ est l’élément neutre pour le produit de convolution ($\delta \star f = f$).

On a donc $\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}[f] = f$ soit $\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{F}^{-1}$, c’est la formule de réciprocity.

Ceci n’est pas une démonstration de la formule de réciprocity ; par exemple nous avons fait un usage non justifié du théorème de Fubini.

Remerciements : Je remercie Mickael Chekroun dont les observations et la lecture attentive m’ont permis d’améliorer ce document.

Références

- [1] L. Schwartz, Méthodes mathématiques pour la physique, Hermann, Paris, 1961.