

Tous ces exercices sont associés au cours L3 de mathématiques du Département Géosciences. Ils sont liés au chapitre intitulé : "Résolution des systèmes linéaires $Ax = b$ par des méthodes itératives."

Exercice 1

Soit B (resp. \mathcal{L}_1) la matrice d'itération de la méthode itérative de Jacobi (resp. Gauss-Seidel) de résolution des systèmes linéaires $Ax = b$. Le but de cet exercice est de montrer (sur des exemples) qu'en général on ne sait rien dire de la comparaison de deux méthodes itératives.

1) Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

montrer que $\rho(B) < 1 < \rho(\mathcal{L}_1)$.

2) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

montrer que $\rho(\mathcal{L}_1) < 1 < \rho(B)$.

Exercice 2

Soit $a \in \mathbb{R}$ et la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

- 1) Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle définie positive ?
- 2) Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle SDD (strictement diagonalement dominante) ?
- 3) Pour quelles valeurs de a la méthode de Gauss-Seidel est-elle convergente ?
- 4) Écrire la matrice B de la méthode de Jacobi.
- 5) Pour quelles valeurs de a la méthode de Jacobi converge-t-elle ? Quelle remarque peut-on faire à propos de la question 2) sachant que Jacobi converge si la matrice A est SDD ?
- 6) Écrire la matrice \mathcal{L}_1 de la méthode de Gauss-Seidel ? Calculer $\rho(\mathcal{L}_1)$.
- 7) Pour quelles valeurs de a la méthode de Gauss-Seidel converge-t-elle plus vite que la méthode de Jacobi ?

Exercice 3

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -\alpha \\ -\alpha & 4 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

trouver toutes les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ telles que

- 1) la méthode de Gauss-Seidel converge,
- 2) la matrice A est définie positive.