Tous ces exercices sont associés au cours L3 de mathématiques du Département Géosciences. Ils sont liés au chapitre intitulé : "Résolution des systèmes linéaires $Ax = b$ par des méthodes directes de Gauss et de Householder."

Exercice 1

Soit A et B deux matrices carrées de même ordre n, α et β des scalaires quelconques. On rappelle les relations suivantes du cours :

$$\det(I) = 1, \tag{1}$$
$$\det(AB) = \det(A)\det(B), \tag{2}$$
$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA), \tag{3}$$
$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A), \tag{4}$$
$$\mathrm{tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha \mathrm{tr}(A) + \beta \mathrm{tr}(B). \tag{5}$$

1) Soit I la matrice unité d'ordre n. Peut-on avoir $AB - BA = \lambda I$, λ étant un scalaire non nul ?

2) Peut-on avoir $AB + BA = 0$?

Exercice 2

a)Trouver, par la méthode de Gauss sans stratégie de pivot, l'inverse de la matrice symétrique

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},$$

en supposant que M est inversible. On fait l'hypothèse que $a \neq 0$.

Vérifier que $MM^{-1} = I$ et en déduire le déterminant de la matrice M^{-1}. Vérifier la valeur de ce déterminant en le calculant directement avec l'expression de M^{-1}.

b) Soit la matrice N, 2×2 bloc-symétrique (cela ne veut pas dire que N est symétrique, elle l'est si les matrices blocs-diagonaux sont symétriques) suivante :

$$N = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix},$$

que l'on suppose inversible.

En supposant aussi la matrice A inversible, vérifier formellement, par un calcul direct, que l'inverse de N est :

$$N^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}BSB^TA^{-1} & -A^{-1}BS \\ -SB^TA^{-1} & S \end{pmatrix},$$

où $S = (C - B^TA^{-1}B)^{-1}$. Pour des raisons de dimensionnalité des matrices, la matrice $\mathcal{M} = C - B^TA^{-1}B$ est carrée ; il est donc légitime de considérer son inverse et on fait l'hypothèse qu'il existe.

N.B. : **Les matrices A et C sont carrées, mais la matrice B peut-être rectangulaire.**

c) Vérifier le résultat du a) par le b).

d) Supposons les matrices A et C symétriques, la matrice N est alors symétrique. Sachant que l'inverse d'une matrice symétrique est symétrique, que si E et F sont deux matrices alors $(EF)^T = F^TE^T$ (cette propriété s'étend à tout produit de matrices), vérifier que N^{-1} est aussi une matrice symétrique.

Exercice 3. Existence de la décomposition de Cholesky d'une matrice symétrique définie positive

Soit A une matrice symétrique définie positive d'ordre n. On note par M^T la matrice transposée d'une matrice M, par L une matrice triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale principale et par U une matrice triangulaire supérieure.

a) Expliquez pourquoi la matrice A est régulière ?

b) On considère les sous-matrices (symétriques) Δ_k d'éléments a_{ij}, $1 \leq i, j \leq k$, de la matrice $A = (a_{ij})$. Montrer que les n sous-matrices Δ_k pour $1 \leq k \leq n$ sont définies positives.
Indication : On pourra considérer, pour $1 \leq k \leq n$, le vecteur quelconque $w = (w_i)_{1 \leq i \leq k}$ et calculer le produit scalaire $(\Delta_k w, w)$ en le reliant à un produit scalaire (Av, v).

c) Comme toutes les sous-matrices Δ_k sont définies positives, et donc inversibles, il existe une unique décomposition $A = LU$ (théorème du cours). Montrer que les éléments diagonaux u_{ii} de U sont strictement positifs.

d) On considère la matrice diagonale $\Lambda = diag(\sqrt{u_{11}}, \cdots, \sqrt{u_{nn}})$, d'oú $\Lambda^{-1} = diag(\frac{1}{\sqrt{u_{11}}}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{u_{nn}}})$. En écrivant que $A = LU = L\Lambda\Lambda^{-1}U = BC$ avec $B = L\Lambda$ et $C = \Lambda^{-1}U$, prouver que $C(B^T)^{-1} = B^{-1}C^T = I$ où I est la matrice identité.
Indication : On rappelle que l'inverse d'une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) est triangulaire supérieure (resp. inférieure).

e) En déduire que $A = BB^T$.

f) On peut imposer que les éléments diagonaux de la matrice B soient tous strictement positifs. Montrer alors que la factorisation correspondante $A = BB^T$ est unique.

La décomposition $A = BB^T$ est la décomposition de Cholesky d'une matrice A (symétrique définie positive).

Exercice 4

Soient deux matrices carrées d'ordre n, montrer que $det(\lambda I - BA) = det(\lambda I - AB)$. Les valeurs propres non nulles des deux matrices AB et BA sont les mêmes.

Indication : On pourra considérer les produits matriciels

$$\left(\begin{array}{c|c} \mu I & 0 \\ \hline -B & \mu I \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \mu I & A \\ \hline B & \mu I \end{array}\right) \tag{6}$$

et

$$\left(\begin{array}{c|c} \mu I & -A \\ \hline 0 & I \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \mu I & A \\ \hline B & \mu I \end{array}\right). \tag{7}$$

Exercice 5

Les matrices A_1, A_2 et A_3 de cet exercice, exhibées respectivement par (11), (12) et (13) sont les matrices de discrétisation par la méthode aux différences finies de l'opérateur $-\frac{d^2u}{dx^2}$. Ces matrices correspondent à une discrétisation avec un pas constant h, au facteur $\frac{1}{h^2}$ près, de cet opérateur. La matrice A_1 est associée à un problème de Dirichlet homogène (valeurs nulles de la solution au bord du domaine : par exemple si le domaine est l'intervalle $[0, 1]$ le bord est l'ensemble $\{0, 1\}$ et on impose à la solution de satisfaire aux conditions $u(0) = u(1) = 0$. La matrice A_2 est associée aux conditions $\frac{du}{dx}(0) = 0$ (dite de Neumann homogène) et $u(1) = 0$. Enfin

– **On considère la matrice tridiagonale d'ordre n suivante**

$$A_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & -1 & 1 \end{vmatrix}. \tag{13}$$

Montrer que la matrice A_3 est singulière, $det(A_3) = 0$.

Remarque : **Les matrices A_1 et A_2 étant régulières, les problèmes continus associés, $-\frac{d^2u}{dx^2} = f(x)$ (+ conditions limites correspondantes), ont une solution unique. Par contre, la matrice A_3 étant singulière, le problème continu associé (condition de Neumann homogène aux deux bouts) n'a plus de solution unique même si elle existe. On perd l'unicité.** □

Exercice 6

i) Prouver soigneusement que l'inverse d'une matrice inversible triangulaire supérieure est aussi triangulaire supérieure.
ii) Prouver soigneusement que l'inverse d'une matrice inversible triangulaire inférieure est aussi triangulaire inférieure.
iii) Justifier que le produit L_1L_2 de deux matrices colonnes triangulaires inférieures L_1 et L_2, du type rencontré dans la mise en oeuvre de la méthode de Gauss, est décrit comme à la Figure 1.5 du cours. La diagonale principale de ces matrices est constituée de "1". La première (resp. deuxième) colonne du produit est constituée de la colonne de L_1 (resp. L_2).

Que se passe-t-il si l'on fait le produit L_2L_1 ?

Exercice 7

On note (v, w) le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$.
i) Soit v et w deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $det(I + vw^T) = 1 + (v, w)$.
ii) On suppose la matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ régulière. En déduire que la matrice $(A + uv^T)$ est régulière si et seulement si $\sigma = 1 + (v, A^{-1}u) \neq 0$
iii) Vérifier que $(A + uv^T)^{-1} = A^{-1} - (1/\sigma)A^{-1}uv^TA^{-1}$.

Indication : **Le $i)$ est trivial si $v = 0$, aussi on supposera que $v \neq 0$. On définit la matrice P par $P = I + vw^T$. On pourra montrer que tout vecteur propre x de P est ou non orthogonal à w. S'il n'est pas orthogonal à w on pourra montrer qu'il est multiple de v. Dans chaque cas on pourra exhiber la valeur propre associée à x, avec son ordre de multiplicité, pour finalement en déduire $det(P)$.** □