Tous les exercices sont indépendants.

Exercice 1

Soit A et B deux matrices carrées de même ordre n, α et β des scalaires quelconques. On rappelle les relations suivantes du cours :

$$\det(I) = 1, \tag{1}$$
$$\det(AB) = \det(A)\det(B), \tag{2}$$
$$\det(A^T) = \det(A), \tag{3}$$
$$\det(A^*) = \overline{\det(A)}, \tag{4}$$
$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}, \text{ évidemment si } A^{-1} \text{ existe,} \tag{5}$$
$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA), \tag{6}$$
$$\mathrm{tr}(A^T) = \mathrm{tr}(A), \tag{7}$$
$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A), \tag{8}$$
$$\mathrm{tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha \mathrm{tr}(A) + \beta \mathrm{tr}(B). \tag{9}$$

On suppose maintenant que A et B sont quelconques et non nulles.

1) Soit I la matrice unité d'ordre n. Peut-on avoir $AB - BA = \lambda I$, λ étant un scalaire non nul ?

2) Peut-on avoir $AB + BA = 0$?

Exercice 2

Soit B (resp. $\mathcal{L}_1$) la matrice d'itération de la méthode itérative de Jacobi (resp. Gauss-Seidel) de résolution des systèmes linéaires $Ax = b$. Le but de cet exercice est de montrer (sur des exemples) qu'en général on ne sait rien dire de la comparaison de deux méthodes itératives.

1) Soit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \tag{10}$$
montrer que $\rho(B) < 1 < \rho(\mathcal{L}_1)$.

2) Soit
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \tag{11}$$
montrer que $\rho(\mathcal{L}_1) < 1 < \rho(B)$.

Exercice 3. Résolution d'équations différentielles linéaires

Résoudre le système $\dot{x} = Ax$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

sous la condition initiale $x(0) = (1, -1, 1)^T$.

CORRECTION :

Exercice 1 :

1) Le seul cas intéressant est évidemment celui où le produit matriciel n'est pas commutatif. La fonction déterminant n'étant pas linéaire est inutilisable. Essayons la fonction trace. Par la relation (9) on a $\mathrm{tr}(AB - BA) = \mathrm{tr}(AB) - \mathrm{tr}(BA)$. La relation (6) implique alors que $\mathrm{tr}(AB - BA) = 0$. Comme $\mathrm{tr}(\lambda I) = n\lambda$, la relation $AB - BA = \lambda I$ est impossible si λ est un scalaire non nul.

2) Si $AB + BA = 0$, on a $AB = -BA$ et la relation (8) implique alors que $\det(AB) = (-1)^n \det(BA)$. La relation (2) implique que cette relation est possible seulement si n est pair.

Exercice 2 :

Soit la matrice du 1). Soit B la matrice itérative de Jacobi associée. Avec les notations du chapitre, on a

$$B = D^{-1}(E + F) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

On calcule les valeurs propres par les racines du polynôme $\det(B - \lambda I)$ en λ. Il est facile de vérifier que $\det(B - \lambda I) = -\lambda^3$. $\lambda = 0$ est racine triple, donc $\rho(B) = 0$ et Jacobi converge.

Soit maintenant $\mathcal{L}_1$ la matrice itérative de Gauss-Seidel. Par définition on a $\mathcal{L}_1 = (D - E)^{-1}F$. Tous calculs faits on a :

$$(D - E)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

et donc

$$\mathcal{L}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Il est facile de vérifier que $\det(\mathcal{L}_1 - \lambda I) = -\lambda(2 - \lambda)^2$. Le polynôme caractéristique de la matrice $\mathcal{L}_1$ a pour racines $\lambda_1 = 0$ et la racine double $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$, donc $\rho(\mathcal{L}_1) = 2$ et Gauss-Seidel diverge.

On a bien $\rho(B) < 1 < \rho(\mathcal{L}_1)$.

Soit la matrice du 2). Soit B la matrice itérative de Jacobi associée. On a

$$B = D^{-1}(E+F) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Le polynôme caractéristique de la matrice B est $\det(B - \lambda I) = -\lambda(\lambda^2 + 5/4) = 0$. Les racines sont $\lambda_1 = 0$ et les deux nombres complexes conjuguées $\lambda_\pm = \pm i\sqrt{5}/2$. On a donc $\rho(B) = \sqrt{5}/2$. La méthode de Jacobi diverge.

Soit maintenant la méthode de Gauss-Seidel. Tous calculs faits on a :

$$(D-E)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}, \tag{17}$$

et donc

$$\mathcal{L}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Le polynôme caractéristique de la matrice $\mathcal{L}_1$ est $\det(\mathcal{L}_1 - \lambda I) = -\lambda(1/2 - \lambda)^2$. Les racines sont $\lambda_1 = 0$ et la racine double $\lambda_{2,3} = 1/2$. On a $\rho(\mathcal{L}_1) = 1/2$ et par conséquent la méthode de Gauss-Seidel converge. On a bien $\rho(\mathcal{L}_1) < 1 < \rho(B)$.

Exercice 3 :

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{19}$$

Calculons le polynôme caractéristique de la matrice A et ses racines. On a

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{pmatrix}, \tag{20}$$

donc $\det(A - \lambda I) = -\lambda(\lambda^2 + 3)$. Les racines sont zéro et le couple de valeurs complexes conjuguées $\pm i\sqrt{3}$.

Pour $\lambda_1 = 0$ le vecteur propre associé v_1 satisfait au système $(A - \lambda_1 I)v_1 = 0$, avec

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Par la méthode des co-facteurs du cours, on voit que

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Par conséquent, puisque $e^{\lambda_1 t} = 1$, le vecteur X_1 donné par

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{23}$$

est une solution.

Pour $\lambda_2 = i\sqrt{3}$ le vecteur propre associé v_2 satisfait au système $(A - \lambda_2 I)v_2 = 0$, avec

$$A - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} -i\sqrt{3} & 1 & 1 \\ -1 & -i\sqrt{3} & 1 \\ -1 & -1 & -i\sqrt{3} \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Toujours par la méthode des co-facteurs du cours, on voit que

$$v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 - i\sqrt{3} \\ 1 - i\sqrt{3} \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Par conséquent

$$Z = e^{i\sqrt{3}t} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 - i\sqrt{3} \\ 1 - i\sqrt{3} \end{pmatrix} \tag{26}$$

est une solution complexe du système. Elle s'écrit

$$Z = (\cos(\sqrt{3}t) + i\sin(\sqrt{3}t)) \begin{pmatrix} -2 \\ -1 - i\sqrt{3} \\ 1 - i\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\cos(\sqrt{3}t) \\ -\cos(\sqrt{3}t) + \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t) \\ \cos(\sqrt{3}t) + \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -2\sin(\sqrt{3}t) \\ -\sin(\sqrt{3}t) - \sqrt{3}\cos(\sqrt{3}t) \\ \sin(\sqrt{3}t) - \sqrt{3}\cos(\sqrt{3}t) \end{pmatrix}, \tag{27}$$

de la forme $Z = X_2 + iX_3$.

On sait par un théorème du cours que les parties réelle et imaginaire de Z sont des solutions indépendantes du système. C'est-à-dire que

$$X_2 = \begin{pmatrix} -2\cos(\sqrt{3}t) \\ -\cos(\sqrt{3}t) + \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t) \\ \cos(\sqrt{3}t) + \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_3 = \begin{pmatrix} -2\sin(\sqrt{3}t) \\ -\sin(\sqrt{3}t) - \sqrt{3}\cos(\sqrt{3}t) \\ \sin(\sqrt{3}t) - \sqrt{3}\cos(\sqrt{3}t) \end{pmatrix} \tag{28}$$

sont solutions.

Finalement la solution du système est

$$x(t) = \begin{pmatrix} C_1 - 2C_2\cos(\sqrt{3}t) - 2C_3\sin(\sqrt{3}t) \\ -C_1 + C_2(-\cos(\sqrt{3}t) + \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t)) + C_3(-\sin(\sqrt{3}t) - \sqrt{3}\cos(\sqrt{3}t) \\ C_1 + C_2(\cos(\sqrt{3}t) + \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t)) + C_3(\sin(\sqrt{3}t) - \sqrt{3}\cos(\sqrt{3}t)) \end{pmatrix}. \tag{29}$$

où les constantes C_1, C_2 et C_3 sont déterminées par la condition initiale. Pour $t = 0$ la solution s'écrit :

$$x(0) = \begin{pmatrix} C_1 - 2C_2 \\ -C_1 - C_2 - \sqrt{3}C_3 \\ C_1 + C_2 - \sqrt{3}C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Un calcul élémentaire montre que $C_1 = 1$, $C_2 = C_3 = 0$. La solution du système qui vérifie cette condition initiale est la solution constante

$$x(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{31}$$