Mathématiques L3– Correction de l'examen du 13/01/09

Exercice 1

Calculons le déterminant de la matrice $(A-\lambda I)$ en le développant par rapport à le première ligne. Il vient :

$$det(A-\lambda I) = det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)[(3-\lambda)(4-\lambda)-2] = (1-\lambda)(2-\lambda)(5-\lambda). \quad (1)$$

les valeurs propres sont 1, 2 et 5. Calculons le vecteur propre w_1 tel que

$$(A-I)w_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} w_1 = 0.$$

Calculons w_1 par le théorème 1.2 du cours 7. Les co-facteurs de la première ligne sont : $A_1 = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 4$, $A_2 = -\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = -6$ et $A_3 = \det\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4$. Le théorème 1.2 permet d'affirmer que $w_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre. Par conséquent $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est le vecteur de base de l'espace propre de dimension un associé à la valeur propre $\lambda_1 = 1$. De même pour $\lambda_2 = 2$ (resp. $\lambda_3 = 5$) on trouve $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (resp. $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$). Comme les valeurs propres sont distinctes, le corollaire 1.1 du même cours implique que les trois solutions $x_1 = e^t\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $x_2 = e^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $x_3 = e^{5t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendantes. La solution générale de $\dot{x} = Ax$, dans ce cas, est donc $x(t) = C_1x_1(t) + C_2x_2(t) + C_3x_3(t)$. Dès lors la solution générale est

$$x(t) = \begin{pmatrix} 2C_1e^t \\ -3C_1e^t - C_2e^{2t} + C_3e^{5t} \\ 2C_1e^t + C_2e^{2t} + 2C_3e^{5t} \end{pmatrix},$$

où les constantes C_i sont à déterminer pour que la solution satisfasse à la condition initiale du problème. □

Exercice 2

Évidemment $det(A-\lambda I) = 1-\lambda^2$ et par conséquent $\lambda = 1$ est une valeur propre double. Les vecteurs propres sont solutions de l'équation $(A-I)v = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v = 0$. Par conséquent $v_1 = (0,1)^T$ est un vecteur propre (à un facteur multiplicatif près), et il n'y en a pas d'autre qui soit linéairement indépendant à v_1. Pour trouver une seconde solution au système nous essayons (voir cours) de trouver w_1 tel que $(A-I)w_1 \neq 0$ mais tel que $(A-I)^2 w_1 = 0$ et alors $(A-I)^3 w_1 = 0, \cdots, (A-I)^n w_1 = 0, \cdots$ Le vecteur $w_1 = (1,0)^T$ convient. Une deuxième solution linéairement indépendante de $e^t v_1 = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est (voir paragraphe 1.2.3 du cours 7) $e^t[w_1 + t(A-I)w_1]$. Facilement on vérifie que $e^t[w_1 + t(A-I)w_1] = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ t\alpha \end{pmatrix}$. La solution générale du système est donc

$$x(t) = C_1 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ t\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ t\alpha e^t & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_2 \\ C_1 \end{pmatrix},$$

où C_1 et C_2 sont des constantes.

Exercice 3

D'après le théorème 1.3 de la leçon 6 sur quelques méthodes de résolution explicite, il suffit d'ajouter à la solution de l'équation homogène $\dot{x} = x$ une solution particulière de l'équation complète $\dot{x} = x + e^{2t}$. Pour trouver une solution particulière on utilise la méthode des coefficients indéterminés (voir cours), en la cherchant sous la forme $x_p(t) = \alpha e^{2t}$. Il vient

$$2\alpha e^{2t} = \alpha e^{2t} + e^{2t},$$

soit $2\alpha = \alpha + 1$ et donc $\alpha = 1$. La solution générale est donc $x(t) = Ce^t + e^{2t}$.

Exercice 4

L'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à deux est stable pour l'opération $f \to tf' - f$. En vertu du même principe qu'à l'exercice 3 cherchons une solution particulière de la forme $x_p(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$. En remplaçant dans l'équation, il vient $t(2\alpha t + \beta) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma + t^2$ soit, en identifiant les coefficients des termes de même degré : $\alpha = 1$, $\gamma = 0$ et β quelconque. On peut donc prendre $\beta = 0$ et $x_p(t) = t^2$ est donc une solution particulière. Calculons les solutions x_h de l'équation homogène. On a $t\dot{x} = x$, soit $\frac{\dot{x}}{x} = \frac{1}{t}$; il vient $\log x = \log t + \log C$ ou encore $x_h(t) = Ct$ où C est une constante.

La solution générale est donc $x(t) = x_p(t) + x_h(t) = t^2 + Ct$.

Exercice 5

Les points fixes de $\dot{x} = f(x) = r - x^2$ sont $x^* = \pm\sqrt{r}$. Nous avons deux points fixes pour $r > 0$ et aucun pour $r < 0$ (figure 1). On a donc un point de bifurcation (des états d'équilibres) en $x = 0$ pour $r = 0$, puisque subitement en ce point le problème "passe" de zéro équilibre à deux équilibres lorsque r traverse la valeur zéro dans le sens des r croissants. Pour déterminer leur stabilité on observe que $f'(x^*) = -2x^*$. Ainsi $x^* = +\sqrt{r}$ est stable car $f'(x^*) < 0$. Similairement $x^* = -\sqrt{r}$ est un point fixe instable (voir le sens des flêches sur la figure 1).

Pour étudier la stabilité des solutions on peut aussi faire une approximation du premier ordre autour des points critiques. Soit, pour reprendre les notations du cours, $x_\pm = \pm\sqrt{r}$. Pour une perturbation ξ d'un point fixe, on

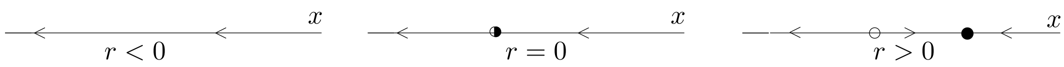

FIG. 1 – Stabilité des points fixes en fonction de r.

étudie ce qu'il advient à cette perturbation (c'est l'idée de futur, ce qui implique que l'on prend $t \to +\infty$). On a, puisque $x_+ = \sqrt{r}$,

$$\begin{aligned} (x_+ + \xi)^{\cdot} &= r - (x_+ + \xi)^2 \\ \dot{\xi} &= r - 2x_+\xi + O(\xi^2) - x_+^2 \\ \dot{\xi} &= -2\sqrt{r}\xi \qquad \Rightarrow \xi(t) = \xi_0 e^{-2\sqrt{r}t} \to_{t\to+\infty} 0 \end{aligned}$$

la perturbation décroît avec le temps (ici exponentiellement), le point x_+ est localement stable. On remarque que $-2\sqrt{r} = f'(x_+)$, $-2\sqrt{r}$ est le linéarisé de f au point d'èquilibre x_+.

De même puisque $x_- = -\sqrt{r}$

$$\begin{aligned} (x_- + \xi)^{\cdot} &= r - (x_- + \xi)^2 \\ \dot{\xi} &= r - 2x_-\xi + O(\xi^2) - x_-^2 \\ \dot{\xi} &= 2\sqrt{r}\xi \qquad \Rightarrow \xi(t) = \xi_0 e^{2\sqrt{r}t} \to_{t\to+\infty} +\infty \end{aligned}$$

la perturbation croît avec le temps (ici exponentiellement), le point x_- est localement instable. On remarque que $2\sqrt{r} = f'(x_-)$, $2\sqrt{r}$ est le linéarisé de f au point d'èquilibre x_-.

On voit donc qu'il suffit de regarder le signe du linéarisé, c'est-à-dire le signe de l'exposant exponentiel (sachant que l'on considère $t \to +\infty$).

On peut de plus s'en convaincre ainsi : soit $r > 0$, considérons d'abord la courbe $\sqrt{r}$.
Cas $x > \sqrt{r}$, alors $\dot{x} < 0$ et x décroît.
Cas $0 < x < \sqrt{r}$, alors $\dot{x} > 0$ et x croît.
Au total, dès que x est dans un voisinage d'un point de la courbe $\sqrt{r}$ (c'est l'idée de la perturbation dans un voisinage du point fixe) est ramené vers la courbe, qui est donc constituée de points fixes stables.

Considérons ensuite la courbe $-\sqrt{r}$ toujours pour $r > 0$.
Cas $x < -\sqrt{r}$, alors $x^2 > r$ et $\dot{x} < 0$ et x décroît.
Cas $-\sqrt{r} < x < 0$, alors $x^2 < r$ et $\dot{x} > 0$ et x croît.
Dans ce cas, dès que x est dans un voisinage d'un point de la courbe $-\sqrt{r}$ il s'en écarte. La courbe $-\sqrt{r}$ est donc constituée de points fixes instables.

Au point de bifurcation (de point fixe) $r = 0$, du type point-selle, nous avons $f'(x^*) = 0$, le système linéarisé est nul lorsque les points fixes fusionnent et on ne peut plus décider de la stabilité du point fixe $r = 0$.

Exercice 6

1a) La figure 2 montre l'allure du champ de vecteurs lorsque r varie. Notons qu'il existe un point fixe $x_1^* = 0$ pour tout r.

1b) Pour $r < 0$ ou $r > 0$ le deuxième point fixe est $x_2^* = r$. Si on pose $f(x) = rx - x^2$ on a $f'(x) = r - 2x$ et donc $f'(x_2^*) = -r$. Pour $r < 0$, on a $f'(x_2^*) > 0$, le point fixe x_2^* est instable. L'étude de la stabilité du point x_1^* ne peut plus s'étudier par le signe de la dérivée en ce point. Mais on voit que si $r < x < 0$ alors $\dot{x} > 0$ et x est croissant,

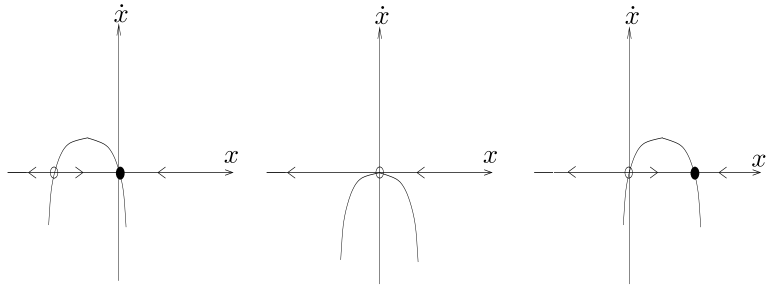

FIG. 2 – Allure du champ de vecteurs en fonction de r.

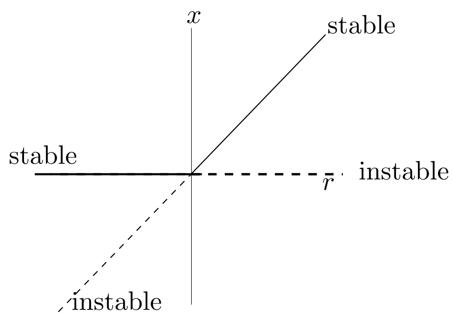

FIG. 3 – Diagramme de bifurcation transcritique.

alors que si $r < 0 < x$ on a $\dot{x} < 0$ et x est décroissant. En résumé si $r < 0$, x est croissant si x est négatif et décroissant si x est positif (voir le signe de $\dot{x}$ sur la figure 2), le point x_1^* est stable. Lorsque r croît vers zéro par valeurs négatives, le point fixe instable x_2^* approche l'origine et fusionne avec x_1^* pour $r = 0$. Finalement lorsque $r > 0$ on remarque que $f'(x_2^*) < 0$ et x_2^* est instable. De plus l'observation de la figure 2 montre que pour $r > 0$ x est croissant si $x > 0$ et décroissant si $x < 0$, donc que x_1^* est instable.

On constate que le point fixe $x_2^* = r$ d'instable devient stable lorsque r passe par zéro, alors que le point fixe $x_1^* = 0$ de stable devient instable lorsque r "traverse" la valeur 0. Il y a *échange de stabilité* entre les deux points fixes x_2^* et x_1^* (voir figure 3).

1c) Voir la figure 3.

2) On note que $x_1^* = 0$ est un point fixe pour tout couple (a, b). Pour x petit, par un développement de Taylor,

$$1 - e^{-bx} = 1 - [1 - bx + \frac{1}{2}b^2x^2 + O(x^3)],$$

soit

$$1 - e^{-bx} = bx - \frac{1}{2}b^2x^2 + O(x^3).$$

Posons $f(x) = x(1-x^2) - a(1-e^{-bx})$. On a donc, au voisinage de l'origine, $\dot{x} = f(x) = x - a(bx - \frac{1}{2}b^2x^2) + O(x^3)$. Ou encore $\dot{x} = (1-ab)x + (\frac{1}{2}ab^2)x^2 + O(x^3)$. Cette équation est du type examiné à l'exercice 5 avec $r = 1 - ab$, elle possède donc une bifurcation transcritique (de points fixes) en $x_1^* = 0$ pour $r = 0$ soit pour $ab = 1$. L'équation de la bifurcation transcritique dans le plan des paramètres est donc donnée par l'équation $ab = 1$;

3) L'équation du deuxième point fixe x_2^* est donnée par la solution non nulle de l'équation $(1-ab)x+(\frac{1}{2}ab^2)x^2 = 0$, c'est-à-dire que $x_2^* = \frac{2(ab-1)}{ab^2}$. Cette formule est valide seulement si x_2^* est petit parce qu'elle est tributaire d'un déveleoppement de Taylor. Dire que x_2^* est petit c'est dire que le numérateur $ab - 1$ est petit et donc que les couples (a, b) de paramètres sont proches de la courbe de bifurcation transcritique.