Tous les exercices sont indépendants et ont pour objectif de faire manipuler les notions du cours. Les connaissances mathématiques nécessaires aux solutions sont élémentaires. L'exercice 3 est un exercice un peu technique sur l'estimation de l'erreur de la formule de quadrature des trapèzes. La méthode proposée de l'estimation de l'erreur est générale pour les méthodes de quadrature de Newton-Cotes. L'exercice 5 est un exercice sur la stabilité des points fixes d'une équation différentielle ordinaire non linéaire (équation logistique avec prélèvement fixe). La présentation (marge, etc, ...) et la clarté de la rédaction seront évidemment prises en compte. Durée de l'examen : 2 heures. Le minutage est indicatif.

Exercice 1 (20 mn)

1) Soit

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Montrer que

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

2) On sait (voir cours) que si les matrices A et B commutent alors $e^{A+B} = e^B e^A = e^A e^B$. En général cette relation sur les exponentielles matricielles est fausse.

Soit les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Constatez que $AB \neq BA$. Calculez les matrices e^A, e^B, $e^A e^B$, $e^B e^A$ et e^{A+B} et vérifiez que $e^{A+B} \neq e^B e^A \neq e^A e^B$.

Indication : On rappelle que $\cosh(x) = 1 + x^2/2! + x^4/4! + x^6/6! + \cdots$ et $\sinh(x) = x + x^3/3! + x^5/5! + x^7/7! + \cdots$.
□

Exercice 2 (10 mn)

Calculer par la méthode du point fixe de Picard, en la justifiant, la racine positive a de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$. Pour démarrer la méthode on pourra partir d'un point arbitraire $x_0 \in J = [0, \infty[$.

Vérifier que l'on peut écrire de façon "amusante" $a = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}}$. Donner une expression algèbrique de a.

N.B. : a est appelé le *nombre d'or*. Pour information $a = 1.61803....$

Exercice 3 (40 mn)

On considère la fonction régulière f, au moins de classe $\mathcal{C}^2$, que l'on veut intégrer numériquement sur l'intervalle $I = [a, b]$ par la règle de quadrature des trapèzes.

1) Soit un maillage **régulier** de l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$, $1 \leq i \leq n$. On pose $h = x_{i+1} - x_i$. Rappeler la formule itérée des trapèzes. Vérifier que la formule des trapèzes est exacte pour les constantes et les polynômes de degré un et qu'elle est inexacte pour les polynômes de degré deux.

2) On considère la méthode simple des trapèzes avec l'intervalle I non partitionné, on pose $h = b - a$. Définir l'erreur $e(h)$ commise en calculant l'intégrale à l'aide de la formule simple du trapèze.

On veut déterminer dans la suite l'erreur $e(h)$. On rappelle la formule de Taylor avec reste intégral. Soit $f \in \mathcal{C}^2[a, b]$, alors pour tout $x \in [a, b]$ on a

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \int_a^x (x - t) f''(t) dt.$$

Vérifier, dans un premier temps, que l'on a

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \int_a^b (x - t)_+ f''(t) dt,$$

avec la convention

$$(x - t)_+ = \begin{cases} (x - t) & \text{si } x \geq t \\ 0 & \text{si } x < t \end{cases}. \qquad (1)$$

On introduit ensuite l'opérateur linéaire

$$\mathcal{L}_x : f \rightarrow \int_a^b f(x) dx - \frac{h}{2}(f(a) + f(b)),$$

l'intégration en la variable x est indiquée par un indice x à la notation $\mathcal{L}$.
Prouver que

$$e(h) = \int_a^b f''(t) K(t) dt,$$

avec

$$K(t) = \mathcal{L}_x[(x - t)_+],$$

.

3) Vérifier que

$$K(t) = \frac{(b - t)(a - t)}{2}.$$

N.B. : On admettra que l'on peut intervertir les signes d'intégration en x et t (théorème de Fubini). □

4) On rappelle le théorème de la moyenne suivant :
Théorème : Soient $f \in \mathcal{C}^0[a, b]$ et une fonction g intégrable sur $[a, b]$ et de signe constant sur $[a, b]$, alors il existe au moins un $\xi \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx. \ \square$$

En utilisant ce théorème, montrer que

$$e(h) = -\frac{h^3}{12} f''(c), \quad c \in [a, b]. \qquad (2)$$

5a) On considère une partition arbitraire (non régulière) de l'intervalle I en n sous-intervalles $[x_{i+1} - x_i]$, on pose $h_i = x_{i+1} - x_i$. Écrire la méthode des trapèzes itérée.
5b) On pose $h = \max_i(h_i)$. Soit E l'erreur de la méthode de quadrature itérée des trapèzes. L'erreur E est la somme des erreurs $e_i(h_i)$ sur les n sous-intervalles de la partition. Prouver que

$$|E| \leq \frac{h^2}{12}(b-a) \max_{x \in I} |f''(x)|.$$

Indication : On remarquera que $h_i^3 \leq h^2 h_i$.
Contrôler que l'ordre de la méthode des trapèzes est bien (seulement) d'ordre un.

Exercice 4 (10 mn)

Calculer la solution générale de l'équation $t\dot{x} = x + t^2$.

Indication : On pourra considérer l'opération $f \to tf' - f$ et remarquer que l'espace $\mathcal{P}_2$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 est stable pour cette opération, c'est -à-dire que $f \in \mathcal{P}_2$ alors $(tf' - f) \in \mathcal{P}_2$.

Exercice 5 (40 mn)

Considérons le modèle logistique simplifié, mais avec prélèvement fixe, en considérant qu'une partie de la population disparaît à vitesse fixe c, par maladie ou capture. Le modèle logistique s'écrit alors :

$$\dot{x}(t) = (1 - x(t))x(t) - c \tag{3}$$

où c est une constante strictement positive. On note par $x_0 = x(0)$ la condition initiale de la solution.

1) Trouver les points d'équilibre et étudier leur stabilité.
2) En général on ne sait pas exhiber une solution explicite à une équation différentielle ordinaire non linéaire. Cependant, on demande de résoudre cette équation pour
   - $c = 1/4$,
   - $c < 1/4$.
3) Discuter avec ces solutions les résultats de stabilité du 1).
   N.B. : Vous remarquerez que les résultats d'instabilité peuvent être directement établis si on dispose de la solution explicite .... mais encore faut-il pouvoir l'exhiber ! Ce qui montre tout l'intérêt de l'analyse qualitative des systèmes. □
4) Montrer, dans le cas $c < 1/4$, que pour x_0 strictement inférieur au plus petit point d'équilibre la solution devient négative en un temps fini.