

Cours no 3
Le 17 février 2012

Mathématiques appliquées et numériques

Licence 3, Dpt Géosciences
Année 2011-2012, 2e semestre

Présentation synthétique du cours

Janvier – Juin 2012

Cours donné en 3^e année de
Licence de Sciences de la planète Terre
par Michael Ghil et Jean Roux
TD par Mohamadou Diallo
École normale supérieure, Paris

Troisième cours

Introduction aux équations différentielles scalaires

3.1 Introduction

Les équations différentielles ordinaires (EDO) permettent de décrire le lien entre une fonction et ses dérivées, en particulier la dérivée première qui représente le taux de changement ou encore la vitesse :

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad \text{soit} \quad x(t) = \int_{t_0}^t f(\xi) d\xi,$$

qui est une primitive de f qui s'annule en t_0 .

Quel que soit t_0 , la fonction $t \rightarrow \int_{t_0}^t f(\xi) d\xi$, est une primitive de f . Pour cette raison on désigne par le symbole $\int f(\xi) d\xi$ une primitive quelconque de f , qui s'appelle aussi une intégrale indéfinie de f .

Les équations différentielles ordinaires peuvent être linéaires ou non selon la nature de f . Elles sont parfois appelées équations différentielles ordinaires *scalaires* (resp. *vectérielles*) pour indiquer que le second membre $f(x)$ est à valeurs dans \mathbb{R} (resp. \mathbb{R}^n). L'ordre du système désigne l'ordre de la plus haute dérivée de l'équation. Ici on a affaire à une équation d'ordre un. On peut toujours ramener une équation différentielle scalaire d'ordre n à un système d'équations (i.e. une équation vectorielle) d'ordre un - voir paragraphe 3.5.

La fonction f n'est pas forcément donnée de façon analytique dans les applications, elle peut n'être donnée que numériquement en certains points.

3.2 Exemples d'équations différentielles ordinaires

Une telle EDO est une équation d'évolution et on note

$$dx/dt \equiv \dot{x}.$$

On dit que le temps t est la variable indépendante et le problème à résoudre est un problème aux conditions initiales si $f \in \mathbb{R}^n$ (voir la Figure 3.1 si f est une fonction scalaire).

Deux exemples simples sont donnés par les équations suivantes, munies de la condition initiale $x(0) = 1$:

$$\dot{x} = x \Rightarrow x(t) = e^t$$

$$\dot{x} = ax \Rightarrow x(t) = e^{at}$$

La solution de la première équation est montrée à la Figure 3.2.

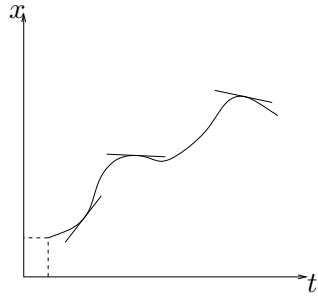


Figure 3.1: Problème aux conditions initiales.

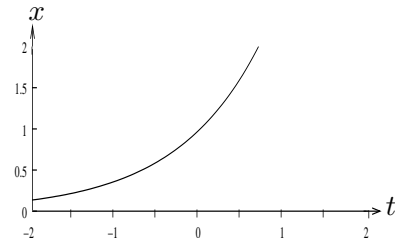


Figure 3.2: Fonction exponentielle solution de $\dot{x} = x$.

De façon plus générale, si on impose $x(0) = x_0$, on a :

$$x(t) = x_0 e^{at}.$$

Ce type de problème à valeur initiale est appelé *problème de Cauchy*, avec une équation différentielle scalaire (resp. vectorielle) et une condition initiale scalaire (resp. vectorielle). Pour le problème de Cauchy, les questions qui se posent, pour une fonction f générale, concernent tout d'abord l'existence et l'unicité de la solution. Par chaque point $(t, x) = (t_0, x_0)$ passe-t-il une et une seule solution ? Une autre question intéressante est la question de la régularité des solutions et de la dépendance des solutions vis-à-vis des paramètres.

Dans les cas présentés ci-dessus le temps n'entre pas de façon explicite dans l'écriture du second membre de l'équation. Ce sont des systèmes *autonomes*. Si le temps rentre explicitement dans l'équation - dite alors *non autonome* -, et que l'on a un paramètre μ , l'équation devient:

$$\dot{x} = f(x, t; \mu).$$

Dans la suite de ce cours on va généraliser dans deux directions:

- le cas non linéaire ;
- le cas des systèmes d'équations différentielles ($x \in \mathbb{R}^n$).

3.3 Comportements des solutions

3.3.1 Stabilité

On présente ici de façon intuitive, sans donner de définition, la notion de stabilité.

Dans le cas des équations précédentes, du type $\dot{x} = ax$, pour $a > 0$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \pm\infty,$$

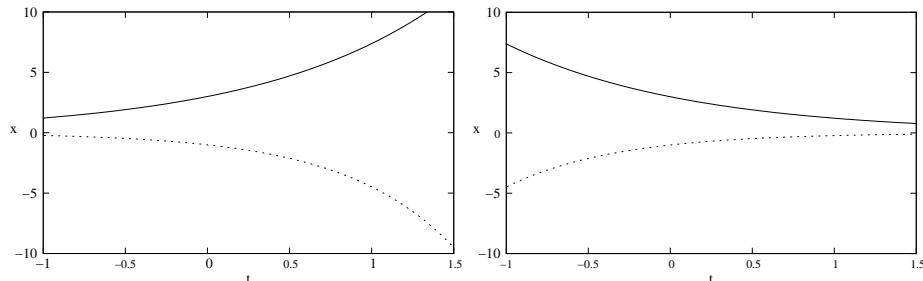


Figure 3.3: Comportement instable pour $a > 0$ (figure gauche) et stable pour $a < 0$ (figure droite). Les solutions pour $x_0 > 0$ sont en traits pleins, celles pour $x_0 < 0$ sont en pointillés.

selon que $x_0 > 0$ ou $x_0 < 0$. Le comportement de cette solution est instable.

Pour $a < 0$, que l'on ait $x_0 > 0$ ou $x_0 < 0$,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0;$$

le comportement de cette solution est stable.

Si x_0 n'est pas connu exactement, mais que l'on a $\hat{x}_0 = x_0 + \epsilon$,

$$\begin{aligned} x(t) &= \hat{x}_0 e^{at} \\ x(t) &= x_0 e^{at} + \epsilon e^{at}. \end{aligned}$$

Si $a > 0$ alors, même avec ϵ petit, on finira loin de la solution recherchée. Par contre si $a < 0$ on trouvera une solution proche. Ainsi la stabilité a des conséquences sur l'exactitude des solutions. Ces deux cas sont dépeints à la Figure 3.3.

Enfin dans le cas présenté jusqu'ici les solutions existent, sont uniques, *lisses* (c'est-à-dire qu'elles sont dans \mathcal{C}^∞), pour tout t .

3.3.2 Oscillations purement périodiques

Avec un système de deux équations des oscillations peuvent apparaître. En mécanique c'est le cas de l'oscillateur harmonique. Dans ce cas

$$\begin{aligned} \dot{y} &= x \\ \dot{x} &= -y. \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

En dérivant une seconde fois \dot{x} on obtient

$$\ddot{x} = -\dot{y} = -x,$$

soit une équation scalaire du second ordre :

$$\ddot{x} + x = 0.$$

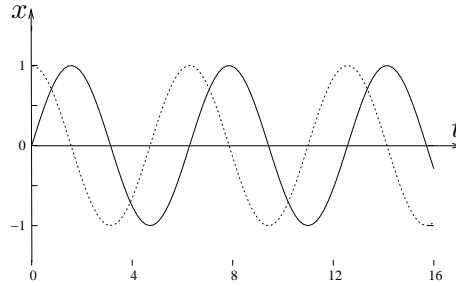


Figure 3.4: Les solutions de $\ddot{x} + x = 0$: $\sin t$ (en trait plein) et $\cos t$ (en pointillés).

Une solution de cette équation est:

$$x_1(t) = \cos t, \text{ et alors } y_1 = -\dot{x}_1 = \sin t. \quad (3.3.2)$$

On constate qu'une autre solution possible est

$$x_2(t) = \sin t, \text{ et alors } y_2 = -\dot{x}_2 = -\cos t. \quad (3.3.3)$$

La solution générale est de la forme

$$x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t. \quad (3.3.4)$$

On constate que

$$y(t) = -\dot{x}(t) = C_1 \sin t - C_2 \cos t \quad (3.3.5)$$

Les constantes C_1 et C_2 sont données par la condition initiale $\{(x(0), y(0) = -\dot{x}(0))\}$. La solution $x(t)$ est périodique de période 2π .

L'une des solutions est en déphasage de $\pi/2$ par rapport à l'autre, on peut les voir à la Figure 3.4. Les deux solutions sont en quadrature de phase:

$$x_1\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = x_2(t).$$

Plus généralement soit le système

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \omega x \\ \dot{x} &= -\omega y, \end{aligned}$$

les solutions sont :

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos(\omega t) \\ y(t) &= \sin(\omega t). \end{aligned}$$

La période de la solution du système est alors $2\pi/\omega$.

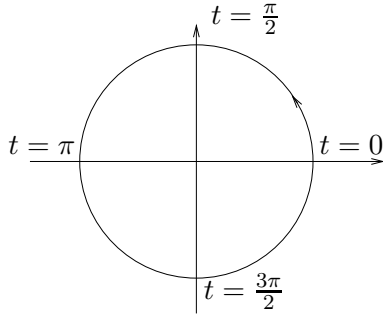


Figure 3.5: Diagramme de phase des solutions de (3.3.1).

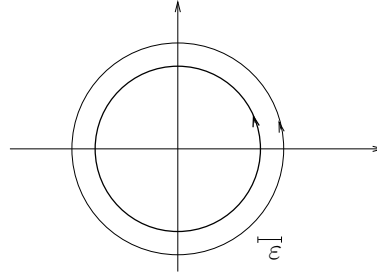


Figure 3.6: Stabilité neutre des solutions de l'équation (3.3.1) dans l'espace des phases.

L'ensemble des états de la solution d'une EDO est appelé *espace des phases*. En deux variables, il est facile de tracer sur un graphique, pour une condition initiale donnée, une composante de la solution en fonction de l'autre en partant de la condition initiale. Ce type de graphique est dans le plan des variables indépendantes, également appelé *plan des phases*. C'est un *diagramme de phase* - Figure 3.5 -. Dans notre cas c'est l'espace des variables $\{(x, y)\}$.

Considérons le cas $\omega = 1$. Supposons que l'on impose la condition initiale $x(0) = r$ et $y(0) = 0$. On sait que, d'après (3.3.4), que la solution générale est $x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$, $x(0) = r$ implique $C_1 = r$. Comme (voir (3.3.5)) $y(t) = C_1 \sin t - C_2 \cos t$, $y(0) = 0$ entraîne $C_2 = 0$. La solution est donc $x(t) = r \cos t$, soit $y(t) = r \sin t$, et par conséquent on a :

$$(x(t))^2 + (y(t))^2 = r^2,$$

r dépendant donc de la condition initiale. La figure du diagramme de phase est un cercle de rayon r , visible à la figure 3.5. On voit qu'il s'agit d'un mouvement périodique, l'orbite est fermée, car $x^2(t + T) + y^2(t + T) = x^2(t) + y^2(t)$ avec $T = 2\pi$ ou $T = 2\pi/\omega$ dans les deux cas précédents, dans le plan des phases. Ce sont des oscillations purement périodiques.

Concernant la stabilité, on remarque qu'avec une condition initiale inexacte, soit $x(0) = r + \varepsilon$ et $y(0) = 0$, on obtient un cercle de rayon $\tilde{r} = r + \varepsilon$ différent. Il s'agit d'une stabilité neutre, illustrée par la Figure 3.6.

3.3.3 Oscillations quasi-périodiques

Dans ce cas on a plusieurs périodes ω_1, ω_2 telles que $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbf{Q}$. C'est le cas de la mécanique céleste, et cela explique que l'on n'ait jamais exactement la même conjoncture, un fait déjà connu par les civilisations anciennes d'Asie et d'Amérique. Il faut au minimum 3 équations différentielles autonomes de premier ordre pour avoir ce comportement.

3.3.4 Comportement chaotique

Tous les systèmes précédents sont dits déterministes : si la condition initiale est donnée, la solution est connue ou calculable de façon prédictible à partir de cette condition. Mais il existe des systèmes déterministes *sensibles aux conditions initiales* tels qu'une très faible erreur sur la donnée entraîne des comportements imprédictibles. C'est le *chaos déterministe* - modèle de Lorenz.

3.3.5 Explosion en temps fini

Les systèmes linéaires à coefficients constants ont des solutions régulières pour tout t réel, en particulier elles sont \mathcal{C}^∞ . Si on regarde une équation différentielle non linéaire simple, on peut obtenir des comportements plus problématiques. On considère

$$\dot{x} = x^2, \quad x(0) = 1,$$

la solution est

$$x(t) = \frac{1}{1-t},$$

et donc $\lim_{t \rightarrow 1^-} x(t) = +\infty$. On reviendra sur cette équation au cours no 5, paragraphe 5.2.2. Dans ce cas on dit qu'il y a explosion en temps fini, en effet on a des valeurs infinies de la solution pour t fini. A cause de la présence de cette singularité on ne peut pas continuer la solution au-delà de $t = 1$. La *durée de vie* de la solution n'est pas tout l'intervalle $] -\infty, \infty[$ (Figure 3.7). Dans le cas des systèmes linéaires à coefficients constants la durée de vie est infinie. Les systèmes pour lesquels cette durée de vie est infinie sont appelés *complets*.

Un autre problème similaire est la perte de dérivée. Dans ce cas les solutions ne sont pas \mathcal{C}^∞ , il peut y avoir des singularités de type discontinuité, cisaillement.

3.4 Présentation intuitive de la notion de champ de vecteurs et courbe intégrale

La terminologie *champ de vecteurs* est celle utilisée par les spécialistes des systèmes dynamiques. Comme les systèmes dynamiques sont omniprésents dans les géosciences cette notion, qui peut sembler un peu abstraite de prime abord, doit devenir usuelle.

Considérons une fonction g définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans \mathbb{R}^n et l'équation différentielle $\dot{y}(t) = g(y(t))$. Si φ est une solution, au point $(t, \varphi(t))$ du graphe de φ on peut associer les composantes du vecteur vitesse $\dot{\varphi}(t) = g(\varphi(t))$. À chaque point du graphe on associe donc une direction

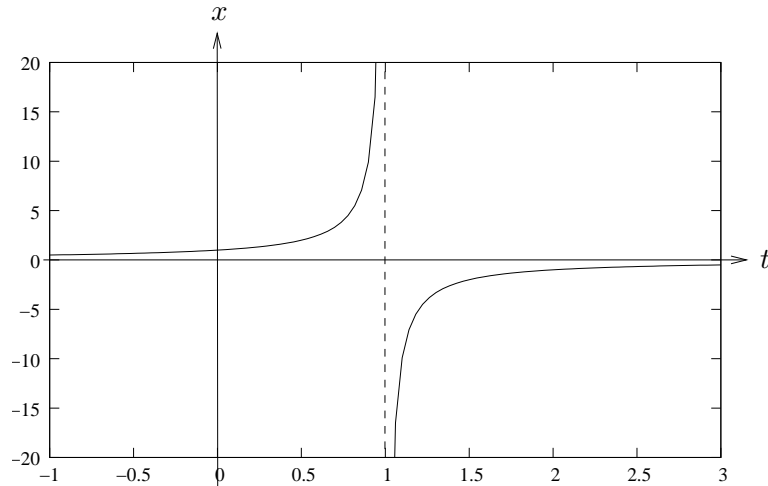


Figure 3.7: Explosion en temps fini pour $t = 1$, pour la solution de $\dot{x} = x^2$ satisfaisant à la condition initiale $x(0) = 1$.

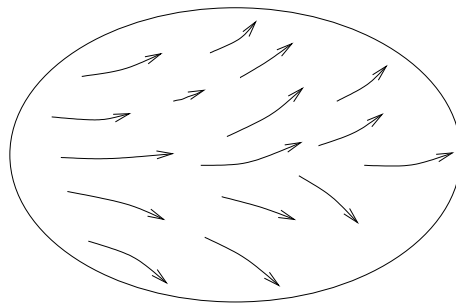


Figure 3.8: Champ de vecteurs sur un domaine de \mathbb{R}^2 .

donnée par les composantes de $g(\varphi(t))$ qui apparaît comme un vecteur. Le second membre g de l'équation différentielle est donc un champ de vecteurs dépendant de t .

Par exemple soit le système en dimension deux

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = g_1(y_1(t), y_2(t)) \\ \dot{y}_2(t) = g_2(y_1(t), y_2(t)) \end{cases} \quad (3.4.1)$$

le champ de vecteurs (Figure 3.8) associé est le champ de vecteurs $g = (g_1, g_2)^T$, généralement noté X .

La définition d'un champ de vecteurs, dans un sens moins élémentaire, nécessite un outillage mathématique hors programme. Ces notions sont développées dans les compléments en ligne du livre.

On peut maintenant définir la courbe intégrale d'un champ de vecteurs.

Définition 3.4.1. Soit X un champ de vecteurs à valeurs dans un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$, la solution $\varphi(t)$ de l'équation différentielle $\dot{x} = X(x)$

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = X(\varphi(t)) \quad (3.4.2)$$

est une courbe différentiable, définie sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans U . C'est la courbe intégrale du champ de vecteurs (ou de l'équation différentielle).

3.5 Formulation générale du problème continu

Rappelons qu'une fonction f est dite de classe \mathcal{C}^k si elle admet des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre k .

Considérons un ouvert U de $\mathbb{R}^{1+p\ell+m} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \times \dots \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m$ et une application F de classe \mathcal{C}^k de U à valeurs dans \mathbb{R}^p . On peut associer à cette application une équation différentielle

$$\varphi^{(\ell)} = F(t, \varphi(t), \dots, \varphi^{(\ell-1)}(t), \mu), \quad (3.5.1)$$

où $\varphi(t)$, appelée solution de (3.5.1), est une fonction vectorielle définie sur un intervalle ouvert I , à valeurs dans \mathbb{R}^p et ℓ fois différentiable, $\varphi^{(s)} = d^s\varphi/dt^s$ pour $1 \leq s \leq \ell$, et μ est un paramètre dans \mathbb{R}^m . En introduisant les composantes sur \mathbb{R}^p , l'équation (vectorielle) (3.5.1) est équivalente à un *système différentiel* de p équations en dimension 1 (c'est une terminologie ancienne; nous parlerons plutôt d'équation différentielle en dimension p , omettant le qualificatif de vectorielle).

Définition 3.5.1. Le nombre p est la dimension de l'équation. On dit qu'elle est d'ordre ℓ pour indiquer l'ordre maximum de différentiabilité (en particulier l'équation différentielle d'un champ de vecteurs est d'ordre 1 par définition). Si F ne dépend pas du temps t (dépendance triviale !) on dit que l'équation est autonome. Une équation non autonome est donc une équation dépendant non trivialement du temps. Enfin μ désigne un système de m paramètres (le nombre m dépend du modèle, il se peut même que $m = 0$). Pour chaque valeur de μ on a donc une équation différentielle et lorsque l'équation dépend non trivialement d'un paramètre, on dit souvent que l'on a affaire à une famille d'équations différentielles.

Nous allons montrer qu'une équation différentielle générale du type (3.5.1) se ramène toujours formellement à l'équation différentielle d'un champ de vecteurs X , c'est-à-dire à un système d'équations différentielles d'ordre 1. Ce champ X est généralement non linéaire, mais il peut être construit autonome et sans paramètres. Il suffit pour cela de rajouter des variables supplémentaires dans l'espace d'arrivée de la fonction inconnue, ainsi que des lignes supplémentaires d'équation. Précisément on introduit un système

d'équations différentielles du premier ordre, où le temps est désigné par τ , portant sur une fonction $\tau \rightarrow (t(\tau), \mu(\tau), \varphi_0(\tau), \dots, \varphi_{\ell-1}(\tau))^T$:

$$\begin{cases} \frac{dt}{d\tau} = 1 \\ \frac{d\mu}{d\tau} = 0 \\ \frac{d\varphi_0}{d\tau} = \varphi_1 \\ \frac{d\varphi_1}{d\tau} = \varphi_2 \\ \vdots \\ \frac{d\varphi_{\ell-1}}{d\tau} = F(t, \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{\ell-1}, \mu) \end{cases} \quad (3.5.2)$$

où φ_0 joue le rôle de l'inconnue initiale φ dans (3.5.1).

Cette équation différentielle (3.5.2) est celle d'un champ de vecteurs $X = (1, 0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{\ell-1}, F)^T$ sur l'ouvert U , et l'équation (3.5.1) s'écrit

$$\frac{d\psi}{d\tau}(\tau) = X(\psi(\tau)), \quad (3.5.3)$$

Il y a une correspondance biunivoque entre les courbes intégrales de (3.5.2) et les solutions de (3.5.1). En effet si $\varphi(t)$ est une solution de (3.5.1), il est immédiat de voir que $\psi(\tau) = (\tau, \mu(\tau), \varphi(\tau), \varphi^{(1)}(\tau), \dots, \varphi^{(\ell-1)}(\tau))^T$ est une courbe intégrale de (3.5.2). Inversement si $\psi(\tau)$ est une courbe intégrale de (3.5.2), $t = \tau$ à une constante additive près, $\mu(\tau)$ est constant, et la composante $\varphi_0(t)$ est solution de (3.5.1), car les composantes φ_i sont les dérivées successives de φ_0 en raison des dernières lignes de (3.5.2) à l'exception de la toute dernière, enfin la substitution de ces fonctions dans la dernière ligne donne précisément l'équation (3.5.1).

En fait il suffit donc de considérer seulement le cas autonome et un système du premier ordre car on peut toujours s'y ramener. En reprenant les notations usuelles il suffit donc de considérer, au lieu de (3.5.1) l'équation différentielle autonome :

$$\frac{dx}{dt} = X(x), \quad (3.5.4)$$

où X est un champ de vecteurs autonome défini dans \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R}^n avec $n = 1 + p\ell + m$. C'est la notation géométrique utilisée dans la théorie des systèmes dynamiques. On utilise indifféremment, dans ce qui suit, la notation X de champ de vecteurs ou la notation classique f pour désigner un système d'équations différentielles d'ordre un. Dans le cadre \mathbb{R}^n dans lequel nous nous plaçons ces notations sont équivalentes.